

Aufgabe 1: Zwei Porsche-Fahrer unterhalten sich: „Ich habe aus meinem 911er ein Offroad-Tuning verpasst. Die Räder haben jetzt 60 cm Durchmesser statt 50 cm. Ein Rad wiegt aber nach wie vor 10 kg.“ Sagt der andere: „Nun, dann wirst du jedes Beschleunigungsrennen gegen mich verlieren“.

Wir vernachlässigen die Reibung und modellieren ein Rad als Hohlzylinder mit Innenradius R_i und Außenradius R_a , wobei die gesamte Masse in einem 5 cm breiten Ring konzentriert ist. Formel für das Trägheitsmoment: $J = \frac{1}{2} m (R_i^2 + R_a^2)$. Außerdem haben beide Porsche die gleiche Masse von 1,4 t und gleiche Leistung von 200 kW.

1.1 Diskutiere die Aussage, dass der Wagen mit den größeren Rädern schlechter beschleunigt.

Um bei einem Fahrzeug mit Rädern eine Translationsbewegung (also Vorwärtsbewegung) zu erreichen, müssen die Räder gleichzeitig in Rotation versetzt werden. Bei einem großen Rad ist das Trägheitsmoment größer als bei einem kleinen Rad mit gleicher Masse, d.h. das große Rad setzt der Änderung der Rotationsbewegung mehr Widerstand entgegen.

1.2 Nehmen wir für beide Wagen eine Geschwindigkeit von 100 km/h an. Haben beide Wagen die gleiche kinetische (Gesamt)-Energie? Falls nein, welcher Wagen hat die höhere Energie? Begründe in jedem Fall deine Aussage.

Die kinetische Gesamtenergie setzt sich aus Translations- und Rotationsenergie zusammen. Bei gleicher Translations-Endgeschwindigkeit ist bei größeren Rädern mehr Rotationsenergie in den Rädern gespeichert ist. Also hat die getunte "Offroad"-Version eine höhere kinetische Gesamtenergie.

1.3 Berechne die kinetische (Gesamt)-Energie beider Wagen bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h.

Die Translationsenergie ist für beide Wagen gleich:

$$E_{Trans} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1400 \text{ kg} \cdot \left(\frac{100 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \right)^2 = 540123,4568 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 540,123 \text{ kJ}$$

Rotationsenergie $E_{Rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$: Zunächst Trägheitsmomente: $J = \frac{1}{2} m (R_i^2 + R_a^2)$

Rad 60cm Durchmesser: $J_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ kg} \left((0,25 \text{ m})^2 + (0,30 \text{ m})^2 \right) = 0,7625 \text{ kg m}^2$

$$\omega_1 = \frac{v}{r_1} = \frac{100}{3,6 \cdot 0,3 \text{ m}} = 92,5926 \frac{1}{\text{s}}$$

$$E_{Rot1} = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,7625 \text{ kg m}^2 \cdot \left(92,5926 \frac{1}{\text{s}} \right)^2 = 3268,604252 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 3,268 \text{ kJ}$$

Gesamtenergie "Offroad": $E_{kin1} = E_{Trans} + 4 \cdot E_{Rot1} = 5531997,8738 \text{ J} = \mathbf{553,2 \text{ kJ}}$

Rad 50cm Durchmesser: $J_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ kg} \left((0,20 \text{ m})^2 + (0,25 \text{ m})^2 \right) = 0,5125 \text{ kg m}^2$

$$\omega_2 = \frac{v}{r_2} = \frac{100}{3,6 \cdot 0,25 \text{ m}} = 111,111 \frac{1}{\text{s}}$$

$$E_{\text{Rot}2} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,5125 \text{ kg m}^2 \cdot \left(111,11 \frac{1}{\text{s}}\right)^2 = 3163,580247 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 3,164 \text{ kJ}$$

Gesamtenergie ohne "Offroad": $E_{\text{Kin}2} = E_{\text{Trans}} + 4 \cdot E_{\text{Rot}2} = 552777,321 \text{ J} = 552,8 \text{ kJ}$

A: Die kinetische Gesamtenergie des Offroad-Wagen beträgt 553,2 kJ. Die kinetische Energie des anderen Wagen ist um 0,5 kJ kleiner.

1.4 Berechne die Beschleunigungszeit für beide Wagen für ein Beschleunigungsrennen von 0 auf 100 km/h.

$$P = \frac{E}{t} \Leftrightarrow t = \frac{E}{P}$$

Offroad: $t_1 = \frac{E_1}{P} = \frac{553200 \text{ J}}{200000 \frac{\text{J}}{\text{s}}} = 2,763886605 \text{ s}$ o. "Offroad": $t_2 = \frac{E_2}{P} = \frac{552777 \text{ J}}{200000 \frac{\text{J}}{\text{s}}} = 2,763885 \text{ s}$

Hinweis: Dies sind nur theoretische Werte.

A: Der Offroad-Wagen beschleunigt minimal langsamer. In einem normalen Rennen sollte der Unterschied keine Rolle spielen.

Aufgabe 2: Aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie:

"Marsmeteoriten sind achondritische Steinmeteoriten, die vom Planeten Mars stammen. [...] Obwohl der erste SNC-Meteorit bereits 1815 in dem Ort Chassigny in Frankreich gefunden wurde, haben die meisten Meteoritenforscher erst seit Anfang der 1980er Jahre die Herkunft vom Mars anerkannt. Allerdings ist diese Herkunft nicht ganz so eindeutig gesichert wie die Herkunft der Meteoriten vom Mond, denn bislang gab es noch keine Mission zum Mars, die Gestein zum Vergleich mitgebracht hat.

Marsmeteoriten entstehen durch größere Asteroideneinschläge auf dem Mars. Durch die Wucht des Einschlags wird Marsgestein ins All geschleudert. Einige dieser so freigesetzten Gesteinsbrocken erreichen die Erde als Meteoriten."

Wir vernachlässigen die Reibung und tun so, als wären Mars und Erde stationär im Weltall im minimalen Abstand (bezogen auf die Planetenoberflächen), den beide Planeten zueinander haben können.

Daten:

	Masse	Durchmesser
Erde	$5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	12739 km
Mars	$6,419 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	6772 km

Minimaler Abstand Erde-Mars: 55,65 mio km

Gravitationskonstante: $\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$

Masse EETA79001: 7,942 kg

2.1 Nehmen wir an, der spätere Meteorit liegt als Gesteinsbrocken noch auf dem Mars. Berechne den Ortsfaktor für die Marsoberfläche und die Gewichtskraft von EETA79001.

$$F_G = m_{EETA} \cdot g_{Mars} \quad ; \quad F = \gamma \cdot \frac{m_{Mars} m_{EETA}}{r_{Mars}^2} \quad F_G = F \quad \text{Damit} \quad m_{EETA} \cdot g_{Mars} = \gamma \cdot \frac{m_{Mars} m_{EETA}}{r_{Mars}^2}$$

$$\Leftrightarrow g_{Mars} = \gamma \cdot \frac{m_{Mars}}{r_{Mars}^2} = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6,419 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{\left(\frac{1}{2} \cdot 6772 \cdot 10^3 \text{ m}\right)^2} = 3,7366 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_G = m_{EETA} \cdot g_{Mars} = 7,942 \text{ kg} \cdot 3,7366 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 29,6763 \text{ N}$$

Kontrolle: $F = \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6,419 \cdot 10^{23} \text{ kg} \cdot 7,942 \text{ kg}}{\left(\frac{1}{2} \cdot 6772 \cdot 10^3 \text{ m}\right)^2} = 29,6763 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 29,7 \text{ N}$

A: Der Ortsfaktor auf dem Mars beträgt $3,74 \text{ ms}^{-2}$, und die Gewichtskraft beträgt 29,7 N.

2.2 Berechne die Stärke der Erdanziehungskraft auf EETA79001 auf der Marsoberfläche.

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 7,942 \text{ kg}}{(55,65 \cdot 10^9 \text{ m})^2} = 1,0225 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \mu \text{ N}$$

A: Die Anziehungskraft der Erde auf EETA79001 auf der Marsoberfläche beträgt $1 \mu \text{ N}$.

2.3 Berechne den Ort zwischen Erde und Mars, an den man EETA79001 positionieren müsste, damit der Gesteinsbrocken weder auf die Erde, noch auf den Mars fällt.

Gesucht ist der Ort zwischen Erde und Mars, an dem Erdanziehungskraft und Marsanziehungskraft gleich groß sind. Betrachte die Beträge der Anziehungskräfte:

$$F_{Erde} = \gamma \cdot \frac{m_{Erde} m_{EETA}}{r_E^2} ; F_{Mars} = \gamma \cdot \frac{m_{Mars} m_{EETA}}{r_M^2} \quad r_E ; r_M : \text{Entfernung von der Erde bzw. Mars}$$

$$F_{Erde} = F_{Mars} \Leftrightarrow \gamma \cdot \frac{m_{Erde} m_{EETA}}{r_E^2} = \gamma \cdot \frac{m_{Mars} m_{EETA}}{r_M^2} \Leftrightarrow \frac{m_{Erde}}{r_E^2} = \frac{m_{Mars}}{r_M^2}$$

Mit $d = 55,65 \cdot 10^9 m = \text{Abstand Erde - Mars}$ und $d = r_E + r_M \Leftrightarrow r_M = d - r_E$ folgt:

$$\frac{m_{Erde}}{r_E^2} = \frac{m_{Mars}}{(d - r_E)^2} \Leftrightarrow m_{Erde} \cdot (d - r_E)^2 = m_{Mars} \cdot r_E^2 \Leftrightarrow m_{Erde} \cdot (d^2 - 2d r_E + r_E^2) = m_{Mars} \cdot r_E^2$$

$$\Leftrightarrow r_E^2 - 2d r_E + d^2 = \frac{m_{Mars}}{m_{Erde}} \cdot r_E^2 \Leftrightarrow r_E^2 - \frac{m_{Mars}}{m_{Erde}} r_E^2 - 2d r_E + d^2 = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{m_{Mars}}{m_{Erde}}\right) r_E^2 - 2d r_E + d^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow r_E^2 - \frac{2d}{\left(1 - \frac{m_{Mars}}{m_{Erde}}\right)} r_E + \frac{d^2}{\left(1 - \frac{m_{Mars}}{m_{Erde}}\right)} = 0 \Rightarrow r_{E1/2} = \frac{d}{\left(1 - \frac{m_{Mars}}{m_{Erde}}\right)} \pm \sqrt{\frac{d^2}{\left(1 - \frac{m_{Mars}}{m_{Erde}}\right)^2} - \frac{d^2}{\left(1 - \frac{m_{Mars}}{m_{Erde}}\right)}}$$

Sei $\mu = 1 - \frac{m_{Mars}}{m_{Erde}} = 0,8925510546$ Dann ist:

$$r_{E1/2} = \frac{d}{\mu} \pm \sqrt{\frac{d^2}{\mu^2} - \frac{d^2}{\mu}} = \frac{d}{\mu} \pm \sqrt{\frac{d^2}{\mu^2} - \frac{d^2 \cdot \mu}{\mu^2}} = \frac{d}{\mu} \pm \sqrt{\frac{d^2 - d^2 \cdot \mu}{\mu^2}} = \frac{d}{\mu} \pm \frac{\sqrt{d^2 \cdot (1 - \mu)}}{\mu}$$

$$r_{E1/2} = \frac{d \pm d \sqrt{(1 - \mu)}}{\mu} = \frac{1 \pm \sqrt{(1 - \mu)}}{\mu} \cdot d \Rightarrow r_{E2} = 1,487639337 \cdot d \quad \text{Diese zweite Lösung liefert den Ort}$$

hinter dem Mars, an dem die Anziehungskraft von Erde und Mars zwar gleich groß sind, aber in die gleiche Richtung zeigen.

Damit gibt es im Sinne der Aufgabe nur eine Lösung $r_E = 0,7531288402 \cdot d = 4,191161996 \cdot 10^{10} m$

A: Im Abstand von 41,9 mio km von der Erde würde der Gesteinsbrocken zwischen Erde und Mars schweben.

2.4 Wir bringen den Gesteinsbrocken nun ein wenig in Richtung Erde aus dem Gleichgewicht, so dass zur Erde stürzen würde. Berechne die Geschwindigkeit, mit der EETA79001 auf der Erde aufschlagen würde unter Vernachlässigung der Marsanziehungskraft. Benutze das Kontrollergebnis aus Aufgabe 2.3.

$$E_{Kin} = E_{Pot} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_{EETA} v^2 = \gamma m_{Erde} m_{EETA} \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_{Erde}} \right)$$

mit $r_E = \text{Abstand aus Aufgabe 2.3}$ und $r_{Erde} = \text{Erdradius}$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow v &= \sqrt{2 \gamma m_{\text{Erde}} \cdot \left(\frac{1}{r_{\text{Erde}}} - \frac{1}{r_E} \right)} \\ &= \sqrt{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \left(\frac{2}{12,739 \cdot 10^6 \text{ m}} - \frac{1}{4,191161996 \cdot 10^{10} \text{ m}} \right)} \\ &= \mathbf{11189,38418 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \text{Einheiten: } \sqrt{\frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \text{kg} \cdot \frac{1}{\text{m}}} = \sqrt{\text{N} \frac{\text{m}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Geschwindigkeit entspricht fast der Fluchtgeschwindigkeit von 11,2 km/s von der Erde. Der Unterschied zwischen der Entfernung 41,9 mio km und "unendlich" ist nicht sehr groß, da die Kraft mit dem Abstand zum Quadrat abnimmt und die Erdanziehungskraft in dieser Entfernung bereits sehr klein ist.

A: Der Gesteinsbrocken würde mit mehr als 11 km/s auf der Erde aufschlagen.

2.5 Berechne die Arbeit, die man aufwenden müsste, um EETA79001 mit soviel kinetischer Energie von der Marsoberfläche abzuschießen, damit er die Erde erreichen kann. Die Erdanziehungskraft soll für diese Rechnung komplett vernachlässigt werden!

Gesucht ist die potentielle Energiedifferenz des Gesteinsbrockens zwischen der Marsoberfläche und einem Punkt in der Entfernung Marsmittelpunkt-Erdoberfläche.

$$\begin{aligned} E_{\text{Pot}} &= \gamma m_{\text{Mars}} m_{\text{EETA}} \left(\frac{1}{r_{\text{Mars}}} - \frac{1}{d+r_{\text{Mars}}} \right) \quad \text{mit } d = 55,65 \cdot 10^9 \text{ m} = \text{Abstand Erde-Mars} \\ &= 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 6,419 \cdot 10^{23} \text{ kg} \cdot 7,942 \text{ kg} \cdot \left(\frac{2}{6,772 \cdot 10^6 \text{ m}} - \frac{1}{55,65 \cdot 10^9 \text{ m} + 0,5 \cdot 6,772 \cdot 10^6 \text{ m}} \right) \\ &= 1,0112012765 \cdot 10^8 \text{ N m} = \mathbf{101 \cdot 10^6 \text{ J}} \end{aligned}$$

A: Die aufzuwendende Arbeit beträgt 101 mio J.

2.6 Berechne die Geschwindigkeit, mit der man EETA79001 von der Marsoberfläche abschießen müsste, um ihn komplett aus dem Anziehungsbereich des Mars zu entfernen.

$$\begin{aligned} E_{\text{Kin}} = E_{\text{Pot}} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} m_{\text{EETA}} v^2 = \gamma m_{\text{Mars}} m_{\text{EETA}} \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r_{\text{Mars}}} - \frac{1}{r} \right) \\ \Leftrightarrow v &= \sqrt{2 \gamma m_{\text{Mars}} \cdot \frac{1}{r_{\text{Mars}}}} = \sqrt{6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 6,419 \cdot 10^{23} \text{ kg} \cdot \frac{2}{6,772 \cdot 10^6 \text{ m}}} = \mathbf{5030,351235 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \end{aligned}$$

A: Die Fluchtgeschwindigkeit vom Mars beträgt rund 5 km/s.