

**Aufgabe I: Maxwell-Gleichungen**

**1.1** Gib eine gültige Definition für die Induktionsspannung an und erkläre die physikalischen Grundlagen.

Die Induktionsspannung  $U_{ind}$  ist definiert als das Linienintegral der induzierten elektrischen Feldstärke  $\vec{E}_{ind}$  längs eines geschlossenen Umlaufs um die Fläche  $\vec{A}$ .

$$U_{ind} = \oint \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{mit} \quad \vec{E} = \vec{E}_{ind} + \vec{E}_C$$

**1.2** Gib die Maxwellgleichung an, aus welcher die Lenz'sche Regel hervorgeht.

4. Maxwell'sche Gleichung  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$

Induktionsgesetz von Faraday: Zeitliche Änderungen des magnetischen Feldes führen zu einem elektrischen Wirbelfeld.

**1.3** Die 3. und 4. Maxwell'sche Gleichung sind, abgesehen von den Feldkonstanten und eines fehlenden Terms, bezüglich der E- und B-Felder symmetrisch. Erkläre das Fehlen dieses Terms.

3. Maxwell'sche Gleichung  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \right)$

4. Maxwell'sche Gleichung  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$

Die rechte Seite in der 3. Maxwellgleichung setzt sich aus dem Strom bewegter elektrischer Ladungen und Verschiebungsstrom zusammen, der eine Änderung des elektrischen Feldes ist. Beides sind Ströme. Die rechte Seite der 4. Maxwellgleichung beinhaltet die magnetische Analogie zu elektrischen Strömen. Die Änderung des magnetischen Feldes entspricht dem Verschiebungsstrom in der 3. Maxwellgleichung. Es gibt aber keine Analogie zum Strom bewegter elektrischer Ladungen, da es keine magnetischen Monopole gibt. Deshalb fehlt dieser Term.

**1.4** Erkläre mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichungen, warum ein Strom mit  $\frac{dI}{dt} \neq 0$  eine elektromagnetische Welle auslöst.

1.  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \right)$ : Ein zeitlicher veränderlicher Strom  $\frac{dI}{dt}$  bewirkt ein sich

zeitlich veränderliches Magnetfeld  $\frac{dB}{dt}$ .  $\frac{d}{dt} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \frac{d}{dt} I$

2.  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ : Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld  $\frac{dB}{dt}$  bewirkt ein sich zeitlich

veränderliches elektrisches Feld  $\frac{dE}{dt}$ .  $\frac{d}{dt} \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \frac{d}{dt} \vec{B} \cdot d\vec{A}$ :

3.  $\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} d\vec{A} \right)$ : Ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld  $\frac{dE}{dt}$  bewirkt ein sich zeitlich veränderliches Magnetfeld  $\frac{dB}{dt}$ .

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \frac{d}{dt} \left( \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} d\vec{A} \right)$$

Die Schritte 2 und 3 wiederholen sich nun immer weiter. Die sich wechselseitig erzeugenden Felder breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.

**1.5** Zitat: „This velocity is so nearly that of light, that it seems we have strong reason to conclude that light itself (including radiant heat, and other radiations if any) is an electromagnetic disturbance in the form of waves propagated through the electromagnetic field according to electromagnetic laws.“

Erkläre, von welcher Geschwindigkeit Maxwell hier spricht, sowie das Gedankenexperiment, das Auslöser für diese Erkenntnis war. Erkläre und die physikalischen Überlegungen, die Maxwell zu dieser Aussage führten und wie er physikalische Gesetze genutzt hat, um zu dieser Aussage zu kommen.

Hinweis: Eine Skizze für diese Aufgabe ist nicht unbedingt erforderlich (und gibt keine Extrapunkte). Eine Rechnung ist ebenfalls nicht erforderlich; die Gleichungen sollen aber aufgeschrieben werden.

*Gedankenexperiment: Eine positive Ladung Q wird ruckartig eine kurze Strecke nach unten beschleunigt und wieder angehalten. Unter Annahme einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit v von Kraftwirkungen kann das elektrostatische Feld der Ladung nicht sofort folgen. Die Folge ist eine „Verbiegung“ der Feldlinien, die sich mit v senkrecht zur Bewegungsrichtung der Ladung fortpflanzt. An diesen Stellen sind die Feldlinien so gestört, dass sie kurzzeitig parallel zur Bewegungsrichtung der Ladung gerichtet sind (unabhängig von der Lage der Störung zur Ladung). Dies geschieht, bis das neue elektrische Feld der nun wieder ruhenden Ladung aufgebaut ist.*

*Die verschobene Ladung Q entspricht einem kurzzeitigen Strom I, der wiederum ein konzentrisches Magnetfeld B erzeugt. Auch dieses Feld breitet sich mit der Geschwindigkeit v aus, d.h. die Radien der Magnetfeldlinien um den Stromfluss werden immer größer.*

*Betrachtet man nun den Raumbereich einer Störungszone, so sieht man ein E-Feld und ein B-Feld, die senkrecht aufeinander stehen. Beide stehen senkrecht zu v. Dieser Raumbereich verhält sich wie ein Wellenpaket aus E und B-Feld, dass sich mit v ausbreitet. Anwendung der Maxwell'schen Gleichungen auf diesen elektromagnetischen Feldimpuls.*

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} d\vec{A} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} d\vec{A} \quad , \text{ weil } I = 0.$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

*Rechts stehen Flächenintegrale, links Linienintegrale über die Ränder dieser Flächen. Die Integrationsfläche wird rechteckig gewählt und so klein, dass die Felder als homogen angenommen werden können. Dieses Rechteck steht für die erste Gleichung senkrecht zu  $\vec{E}$  und für die zweite Gleichung senkrecht zu  $\vec{B}$  und nur eines Seite des Rechtecks wird von den Feldern durchsetzt. Die Ränder werden gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.*

Die Anwendung der 3. und 4. Maxwellgleichung führt zu  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist also nur von  $\mu_0$  und  $\epsilon_0$  abhängig und somit konstant! Die Art der Beschleunigung der Feldimpuls erzeugenden Ladung und auch die Stärke der Ladung spielen keine Rolle.

Die Werte von  $\mu_0$  und  $\epsilon_0$  konnten experimentell bestimmt werden und Maxwell errechnete für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einen Wert von etwa  $v = 310.740.000$  m/s.

Die veranlasste Maxwell zu der Schlussfolgerung, dass Licht eine elektromagnetische Welle sein muss.

### Aufgabe II: Wechselstromkreise

**1.1** Gib eine gültige Definition für die Effektivspannung bei Wechselstromkreisen an.

Die effektive Stromstärke hat den Wert, den ein Gleichstrom hat, der an einem ohmschen Widerstand in einer gewissen Zeit die selbe Energie, also auch im zeitlichen Mittel dieselbe elektrische Leistung, umsetzt. Analoges gilt für die Spannung.

**1.2** Wir betrachten drei Stromkreise mit einer sinusförmigen Wechselspannung. Ein Stromkreis mit einem Ohmschen Widerstand, einer mit einer Spule und einer mit einem Kondensator. In allen drei Stromkreisen wird mit einem Oszilloskop die Stromstärke gemessen.

Beschreibe die Beobachtung für alle drei Stromkreise und erkläre die Unterschiede in den Beobachtungen. Skizziere ein Zeigerdiagramm für einen Stromkreis mit Spule oder Kondensator mit Spannung und Stromstärke, das die Versuchsbeobachtung wiedergibt.

*Beobachtung:*

- Widerstand: Strom und Spannung in Phase  $u_R = \hat{u}_R \sin(\omega t)$  mit  $\hat{u}_R = R \hat{i}$
- Spule: Strom läuft Spannung hinterher  $u_L = \hat{u}_L \sin(\omega t + \pi/2)$  mit  $\hat{u}_L = \omega L \hat{i}$
- Kondensator: Strom läuft vor der Spannung  $u_C = \hat{u}_C \sin(\omega t - \pi/2)$  mit  $\hat{u}_C = \frac{\hat{i}}{\omega C}$

*Erklärung:*

- Widerstand: Zu jedem Zeitpunkt ist  $I = \frac{U}{R}$ , also  $I \sim U$ .
- Spule:  $U_{ind}$  ist am größten, wenn die Änderung von B am größten ist, also beim Nulldurchgang von B.
- Kondensator:  $u_C = \frac{q}{C}$  Die Ladung auf dem Kondensator ist am größten, wenn der Strom seine Richtung umgekehrt, also beim Nulldurchgang.

**1.3.** Ein Kondensator mit der Kapazität  $C = 4 \mu F$  wird an eine Steckdose im normalen Hausnetz ( $U_{eff} = 230 V$ ;  $f = 50 Hz$ ) angeschlossen.

**1.3.1** Berechne die Effektivstromstärke  $I_{eff}$  und die Scheitelstromstärke  $I_0$ .

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \frac{1}{s} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \frac{As}{V}} = 795,77 \Omega$$

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z_C} = \frac{230 V}{795,77 \Omega} = 0,2890 A$$

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow I_0 = I_{eff} \cdot \sqrt{2} = 0,4087 A$$

**A: Die effektive Stromstärke beträgt 0,29 A und die Scheitelstromstärke beträgt 0,41 A.**

**1.3.2** Stelle die Gleichung für die Stromstärke  $I(t)$  auf und berechne die aktuelle Stromstärke nach  $t_1 = 1 ms$ .

$$u_C = \hat{u}_C \sin(\omega t - \pi/2) \quad \text{mit} \quad \hat{u}_C = \frac{\hat{i}}{\omega C}$$

$$i(t) = \frac{u(t)}{Z_C} = \frac{\frac{\hat{i}}{\omega C} \sin(\omega t - \pi/2)}{\frac{1}{\omega C}} = \hat{i} \sin(\omega t - \pi/2) = \hat{i} \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 50 \frac{1}{s} \cdot t\right) = I_0 \cdot \cos\left(100\pi \frac{1}{s} \cdot t\right)$$

$$I(1 \cdot 10^{-3} s) = I_0 \cdot \cos\left(100\pi \frac{1}{s} \cdot 1 \cdot 10^{-3} s\right) = 0,3887 A$$

**A: Die aktuelle Stromstärke nach einer Sekunde beträgt 0,39 A.**

**1.3.3** Berechne den Zeitpunkt  $t_2$  zu dem die aktuelle Stromstärke zum ersten Mal den Wert 0,2 A hat.

$$i(t_2) = 0,2 A \quad i(t_2) = I_0 \cdot \cos\left(100\pi \frac{1}{s} \cdot t\right)$$

$$0,2 A = I_0 \cdot \cos\left(100\pi \frac{1}{s} \cdot t_2\right) \quad | : I_0 \quad \Leftrightarrow \frac{0,2 A}{0,4087 A} = \cos\left(100\pi \frac{1}{s} \cdot t_2\right) \quad | \arccos$$

Da nach dem ersten Durchgang durch 0,2 A gefragt ist, liefert arccos hier direkt das gewünscht Ergebnis.

$$\Rightarrow 1,05944 = 100\pi \frac{1}{s} \cdot t_2 \quad | : (100\pi) \cdot s \quad \Leftrightarrow t_2 = 3,37 \cdot 10^{-3} s$$

**A: Nach 3,4 ms hat die Stromstärke zum ersten Mal den Wert 0,2 A.**

**1.3.4** Angenommen, es liegt ein Fehler im Umspannwerk vor und die effektive Spannung, welche im Hausnetz geliefert werden kann, fällt pro Sekunde um 5%.

Berechne die aktuelle Spannung nach 10 Sekunden.  $\hat{u}(t) = U_0 \cdot 0,95^{t \cdot s^{-1}} = U_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot 0,95^{t \cdot s^{-1}}$

$$u(t) = \hat{u}(t) \cdot \cos\left(100 \pi \frac{1}{s} \cdot t\right) = U_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot 0,95^{s^{-1} \cdot t} \cdot \cos\left(100 \pi \frac{1}{s} \cdot t\right)$$

$$u(10s) = 230 V \cdot \sqrt{2} \cdot 0,95^{s^{-1} \cdot 10s} \cdot \cos\left(100 \pi \frac{1}{s} \cdot 10s\right) = \mathbf{194,75 V}$$

**A: Die aktuelle Spannung nach 10 Sekunden beträgt 194,75 V.**

**2.1** Eine Spule der Länge  $l = 50 \text{ cm}$  mit  $n = 2500$  Windungen und dem Spulendurchmesser  $d = 6,5 \text{ cm}$  wird parallel zu einem Widerstand  $R_1 = 252 \Omega$  geschaltet. Direkt hinter beiden Bauteilen wird die effektive Stromstärke gemessen.

Berechne die Frequenz der Wechselspannung, bei welcher beide Messgeräte die gleiche effektive Stromstärke anzeigen.

Die gleiche Stromstärke wird gemessen, wenn  $Z_L = R$

$$Z_L = 2 \pi f L \quad \Rightarrow R = 2 \pi f L$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{R}{2 \pi L} = \frac{R}{2 \pi \mu_0 n^2 \frac{A}{l}} = \frac{R}{2 \pi \mu_0 n^2 \frac{\pi d^2}{4l}} = \frac{252 \frac{V}{A}}{2 \pi^3 \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot 2500^2 \frac{(0,065 m)^2}{0,5 m}} = \mathbf{769,46 \text{ Hz}}$$

**A: Bei etwa 770 Hz liefern beide Messgeräte das gleiche Ergebnis.**

**2.2** An einer anderen Spule in einem Wechselstromkreis (jetzt ohne zusätzlichen Widerstand) wird ein Wechselstrom mit  $\hat{i} = 10 \text{ mA}$  und eine Wechselspannung mit  $\hat{u} = 6 \text{ V}$  bei einer Phasendifferenz von  $\phi = 55^\circ$  gemessen. Berechne anhand des Phasendiagramms die Schein-, Wirk- und Blindleistung.

$$\text{Scheinleistung: } S = U I = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ V} \cdot 10 \text{ mA} = \mathbf{30 \text{ mW}}$$

$$\text{Wirkleistung: } P = U I \cos(\phi) = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \cos(\phi) = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ V} \cdot 10 \text{ mA} \cdot \cos(55^\circ) = \mathbf{17,2 \text{ mW}}$$

$$\text{Blindleistung: } Q = U I \sin(\phi) = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \sin(\phi) = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ V} \cdot 10 \text{ mA} \cdot \sin(55^\circ) = \mathbf{24,6 \text{ mW}}$$

**A: Die Scheinleistung beträgt 30 mW, die Wirkleistung 17,2 mW und die Blindleistung 24,6 mW.**