

Konstante	Wert	Konstante	Wert
Elementarladung	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$	Masse Elektron	$m_e = 9,1093 \cdot 10^{-31} kg$
Molmasse Kupfer	$M_{Cu} = 63,55 g mol^{-1}$	Dichte Kupfer	$\rho_{Cu} = 8,96 g cm^{-3}$
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} (As)^2 N^{-1} m^{-2}$	mittlerer Abstand Mond-Erde	$r_M = 384.400 km$
Masse Erde	$m_E = 5,974 \cdot 10^{24} kg$	mittlerer Abstand Erde-Sonne	$r_{Ms} = 149,6 Mio. km$
Masse Mond	$m_M = 7,349 \cdot 10^{22} kg$	mittlerer Abstand Mars-Sonne	$r_{Ms} = 227,29 Mio. km$
Umlaufzeit Mond	$T = 27,322 d$		

**Aufgabe 1: Kondensatoraufladung und -entladung**

1. Ein Kondensator mit der Kapazität  $C = 1 \mu F$  wird mit der Spannung  $U_0 = 2 kV$  über einen Widerstand  $R_1 = 0,5 M \Omega$  aufgeladen. Anschließend wird er über einen Widerstand  $R_2 = 2 M \Omega$  wieder entladen. Es gilt für die Kondensatorspannung:

Aufladung:  $U_C(t) = -U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$  Entladung:  $U_C(t) = -U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$

1.1 Berechne die Kondensatorspannung beim Aufladen zum Zeitpunkt  $t_0 = 10 s$ .

$$U_C(10 s) = -2 kV \cdot \left(1 - e^{-\frac{10 s}{0,5 \cdot 10^6 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-6} F}}\right) = -2000 V \cdot (1 - e^{-20}) = 1999,999996 \cdot 10^{-6} V$$

**A: Nach 10 s beträgt ist der Kondensator praktisch voll aufgeladen. Es fehlen noch  $4 \mu V$ .**

1.2 Berechne die Zeit ab Beginn des Entladevorgangs, zu der die Kondensatorspannung noch die Hälfte der ursprünglichen Spannung beträgt. (Wir nehmen an, dass der Aufladevorgang lang genug war, so dass die Kondensatorspannung zu Beginn des Entladevorgangs mit guter Näherung  $U_0 = 2 kV$  ist).

Gesucht ist die Halbwertszeit. Mathematisch suchen wir die t-Koordinate des Punktes  $\left(T_H \left| \frac{U_0}{2} \right.\right)$

Setze den Punkt in die Funktionsgleichung ein:

$$\frac{U_0}{2} = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}T_H} \quad | : U_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{1}{RC}t_1} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{RC} \cdot t_1 \quad | \cdot (-RC)$$

$$\Leftrightarrow -RC \cdot (-\ln(2)) = t_1$$

$$\Leftrightarrow t_1 = RC \cdot \ln(2)$$

Zahlen einsetzen:  $U_0 = 2 \cdot 10^3 V$  ,  $R = 2 \cdot 10^6 \Omega$  ,  $C = 1 \cdot 10^{-6} F$

$$\Leftrightarrow t_1 = 2 \cdot 10^6 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-6} F \cdot \ln(2) = 1,3963 s \quad \text{A: Nach etwa 1,4 s ist er zur Hälfte entladen.}$$

**1.3** Berechne den Zeitpunkt beim Aufladen, zu dem die Spannung  $U_R$  über dem Widerstand und die Kondensatorspannung  $U_C$  gleich groß sind.

$$U_0 = U_R + U_C = 2 U_C \Leftrightarrow U_C = \frac{U_0}{2} \quad \text{Gesucht ist also die Halbwertszeit.}$$

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{2} &= U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot t_H}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot t_H} \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{RC} \cdot t_H} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{RC} \cdot t_H = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{RC} \cdot t_H &= -\ln(2) \Leftrightarrow t_H = \ln(2) RC = \ln(2) \cdot 5 \cdot 10^5 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-6} F = \mathbf{0,35 s} \end{aligned}$$

**A: Nach 0,35 s sind die Spannungen gleich groß.**

**1.4** Leite aus der Formel  $I(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$  für die Stromstärke bei Aufladung eines Kondensators für  $t \rightarrow \infty$  die Beziehung  $Q_0 = C \cdot U_0$  her.

$$Q = \int I(t) dt$$

$$Q_0 = \int_0^{\infty} I(t) dt = \frac{U_0}{R} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} dt = \frac{U_0}{R} \left[ -RC e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \right]_0^{\infty} = \frac{U_0}{R} (0 - (-RC \cdot 1)) = U_0 C \quad \text{q.e.d}$$

**Aufgabe 2: Elektrisches Radialfeld**

**2.** Stellen wir uns ein Universum ohne Gravitation vor. Dennoch umkreist der Mond die Erde in gewohnter Weise. Dies ist in unserem Gedankenuniversum möglich, weil Erde und Mond elektrisch geladen sind.

**2.1** Nehmen wir an, dass die Ladung der Erde  $Q_E = 9,144 \cdot 10^7 C$  beträgt. Zeige mit einer Rechnung, dass in diesem Fall die Ladung des Mondes ebenfalls  $Q_M = 9,144 \cdot 10^7 C$  betragen muss.

Zentripetalkraft  $F_Z = m \omega^2$  ist gleich Elektrostatischer Anziehungskraft  $F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$

$$m \omega^2 r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_M Q_E}{r^2} \Leftrightarrow m \frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_M Q_E}{r^2} \Leftrightarrow 16\pi^3 \epsilon_0 \frac{m r^3}{T^2} = Q_M \cdot Q_E$$

$$\Leftrightarrow Q_M Q_E = 16\pi^3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} A s V^{-1} m^{-1} \frac{7,349 \cdot 10^{22} kg \cdot (3,844 \cdot 10^8 m)^3}{(27,322 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 s)^2} = 3,2888 \cdot 10^{27} C^2$$

$$\Rightarrow Q_M = \frac{3,2888 \cdot 10^{27} C^2}{Q_E} = \frac{3,2888 \cdot 10^{27} C^2}{9,144 \cdot 10^7 C} = \mathbf{3,5967 \cdot 10^{19} C}$$

**A: Das Ladung muss des Mondes muss  $3,6 \cdot 10^{19} C$  betragen.**

(Kontrollergebnis passt nicht wegen Fehler in Aufgabenstellung).

**2.2** Berechne die zu verrichtende Arbeit, um den Mond auf die Höhe der Marsbahn zu heben.

$$W_{21} = \frac{Q_M Q_E}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{Erde}} - \frac{1}{r_{Mars}} \right) = \frac{3,2888 \cdot 10^{27} C^2}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} As V^{-1} m^{-1}} \left( \frac{1}{1,496 \cdot 10^{11} m} - \frac{1}{2,2729 \cdot 10^{11} m} \right) = -1,3011 \cdot 10^{36} J$$

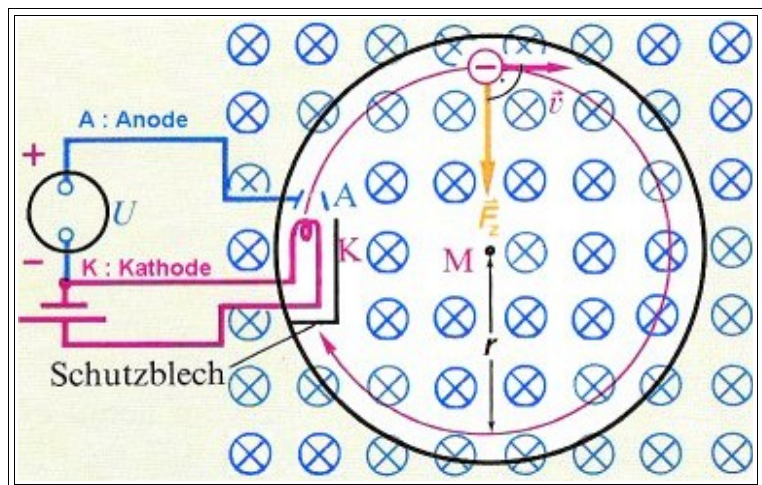
**A:** Es muss die Arbeit von  $1,3 \cdot 10^{36} J$  verrichtet werden.

**Aufgabe 3: Fadenstrahlrohr**

**3.1** Das Bild rechts zeigt einen Elektronenstrahl auf einer Kreisbahn in einer mit Gas gefüllten Glaskugel.

**3.2** Beschreibe den zugehörigen Versuch mit einer Skizze, erläutere den Versuchsablauf, und erkläre, warum sich die Elektronen auf einer Kreisbahn bewegen.

siehe Skript. Stichpunkte: Glühkathode, Gasentladung, Lorentzkraft, Zentripetalkraft



**3.3** Elektrische Felder sind ebenfalls geeignet, Elektronen abzulenken. Erläutere, ob man die gleiche Beobachtung mit Hilfe von elektrischen Feldern aus Plattenkondensatoren erreichen kann.

Nein, denn Plattenkondensatoren lenken konstant in Richtung einer Platte ab. Für eine Kreisbahn muss sich die Richtung der Ablenkung immer ändern und ständig zum Mittelpunkt der Kreisbahn zeigen.

**3.4** Leite mit Hilfe des Kraftansatzes eine Formel her, mit der sich der Radius der Kreisbahn in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung U bei einem gegebenen äußeren Magnetfeld B berechnen lässt.

Ein Teilchen auf einer Kreisbahn im Fadenstrahlrohr erfährt die Lorentzkraft  $F_L = evB$ , die gleich der Zentripetalkraft  $F_Z = mv^2 r^{-1}$  ist.

Also  $F_Z = F_L \Leftrightarrow mv^2 r^{-1} = evB \Leftrightarrow \frac{e}{m} = \frac{v}{Br}$

$\frac{\Delta W}{q} = U \Leftrightarrow \Delta W = qU$  Für ein Elektron, dass im Fadenstrahlrohr durch eine

Spannung  $U_A$  beschleunigt wird, gilt  $\frac{1}{2}mv^2 = eU_A \Rightarrow v = \sqrt{2em^{-1}U_A}$

Einsetzen:  $\frac{e}{m} = \frac{v}{Br} \Leftrightarrow \frac{e}{m} = \frac{\sqrt{2em^{-1}U_A}}{Br} \quad |^2$

$$\Leftrightarrow \frac{e^2}{m^2} = \frac{2eU_A}{mB^2r^2} \quad | \cdot \frac{r^2 m^2}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{2U_A m}{B^2 e} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{2U_A m}{B^2 e}}$$

**3.5** Sei das äußere Magnetfeld  $B=965\mu T$  und die Beschleunigungsspannung  $U_B=210V$ . Berechne den Radius der Kreisbahn der Elektronen.

$$r = \sqrt{\frac{2U_A m}{B^2 e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 210V \cdot 9,1093 \cdot 10^{-31} kg}{(9,65 \cdot 10^{-4} T)^2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} C}} = \mathbf{0,0506 m}$$

**A: Der Radius beträgt etwa 5 cm.**

**3.6** Das Fadenstrahlrohr wird um einige Grad gegenüber dem äußeren Magnetfeld gekippt. Erläutere, warum sich die Elektronen nun auf einer Schraubenbahn bewegen.

*Jetzt haben die Elektronen einen Bewegungskomponente, die parallel zu den Magnetfeldlinien verläuft. Diese Bewegungskomponente wird durch das Magnetfeld nicht verändert. Die Bewegung ist also eine Kombination aus linearer und Kreisbewegung und somit eine Schraubenbahn.*

**3.7** Berechne den Abstand zweier benachbarter Schraubenwindungen, wenn das Fadenstrahlrohr um  $10^\circ$  gekippt wird. ( $B=965\mu T$  ;  $U_B=210V$ )

$$v = \sqrt{2em^{-1}U_A} \quad (\text{siehe oben}) \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} C \cdot 210V}{9,1093 \cdot 10^{-31} kg}} = 8,594357172 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

Einheiten:  $\sqrt{CV kg^{-1}} = \sqrt{As N mA^{-1} s^{-1} kg^{-1}} = \sqrt{kg m s^{-2} m kg} = m s^{-1}$

Zerlegung in Komponenten parallel und senkrecht zum Magnetfeld beim Kippen um  $\alpha$ :

$$v_s = v \cdot \cos(\alpha) \quad ; \quad v_p = v \cdot \sin(\alpha) = \sqrt{2em^{-1}U_A} \cdot \sin(\alpha) = 1,492394461 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

$$\frac{e}{m} = \frac{v_s}{Br} \Leftrightarrow r = \frac{v_s m}{eB} = \frac{m \cdot \sqrt{2em^{-1}U_A} \cdot \cos(\alpha)}{eB}$$

Der Betrag der senkrechten Geschwindigkeitskomponente ändert sich nicht durch die Ablenkung durch das Magnetfeld.  $v_s$  ist also auch die Bahngeschwindigkeit der Kreisbewegung.

$$v_s = \frac{2\pi r}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi r}{v_s} = \frac{2\pi v_s m}{v_s e B} = \frac{2\pi m}{e B} \quad T = 3,702329337 \cdot 10^{-8} s$$

(Bemerkung: Die Umlaufzeit ist unabhängig von der Beschleunigungsspannung und hängt nur vom Magnetfeld und dem betroffenen Teilchen ab).

In der Zeit  $T$  machen die Elektronen also einen Umlauf. In der gleichen Zeit bewegen sie sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_p$  parallel zum Magnetfeld. Die Strecke  $s$ , die sie dabei zurücklegen ist der gesuchte Schraubenwindungsabstand.

$$v_p = \frac{s}{T} \Leftrightarrow s = v_p \cdot T = \frac{\sqrt{2eU_A} \cdot \sin(\alpha) \cdot 2\pi m}{\sqrt{m} e B} = \frac{2\pi \sqrt{2U_A m} \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{e} B}$$

$$s = \frac{2\pi \sqrt{2 \cdot 210V \cdot 9,1093 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \cdot \sin(10^\circ)}{\sqrt{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \cdot 965 \cdot 10^{-6} \text{ T}} = 0,05525335796 \text{ m}$$

**A: Der Abstand zweier Schraubenwindungen beträgt 5,5 cm.**

#### Aufgabe 4: Hall-Effekt

Bei Metallen tritt der Hall-Effekt wegen der hohen Ladungsträgerkonzentration nur schwach auf. Um die kleinen Hall-Spannungen nachzuweisen, muss an sehr dünnen Folien mit hohen Stromstärken gemessen werden:

An einer Kupferfolie mit die Dicke  $d = 10 \mu\text{m}$  wird bei einer Stromstärke von  $I = 10 \text{ A}$  und dem Feld  $B = 430 \text{ mT}$  die Hall-Spannung  $U_H = 22 \mu\text{V}$  gemessen.

**4.1** Berechne die Hall-Konstante  $R_H$  von Kupfer und die Ladungsträgerdichte  $N_V$ .

$$R_H = \frac{U_H d}{I B} = \frac{22 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot 10^{-5} \text{ m}}{10 \text{ A} \cdot 0,43 \text{ T}} = 5,12 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1}$$

$$N_V = \frac{1}{R_H e} = \frac{1}{5,12 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 1,22 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

**A: Die Hallkonstante beträgt  $5,12 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1}$  und die Ladungsträgerdichte  $1,22 \cdot 10^{29} \frac{1}{\text{m}^3}$ .**

**4.2** Berechne die molare Ladungsträgerkonzentration  $N_n$  von Kupfer.

$$N_n = \frac{N_V \cdot M}{\rho} = 1,22 \cdot 10^{29} \frac{\text{m}^{-3} \cdot 63,55 \text{ g mol}^{-1}}{8,96 \text{ g cm}^{-3}} = 8,65 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

**A: Die molare Ladungsträgerkonzentration beträgt  $8,65 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$ .**