

Die Rechnungen bitte vollständig angeben und die Einheiten mitrechnen. Antwortsätze schreiben. Die Reibung ist bei allen Aufgaben zu vernachlässigen, wenn nicht explizit anders verlangt. Besondere Näherungen bitte angeben.

Konstanten und Formeln:

Konstante	Wert	Physikalische Größe	Formel
Gravitationskonstante	$\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$	Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit Innenradius R_i und Außenradius R_a	$J = \frac{1}{2} m (R_i^2 + R_a^2)$
Masse Erde	$m_E = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$		
mittlerer Erddurchmesser	$d_E = 12.735 \text{ km}$		

Aufgabe 1: Space Odyssey

Das Bild rechts zeigt die Raumstation aus Stanley Kubricks berühmten Film „2001 – Odyssee im Weltraum“ aus dem Jahre 1968. Die Raumstation kreist auf einer stabilen Bahn um die Erde und rotiert außerdem um ihre Mittelachse.

Aus der „Encyclopedia of Science“:

The partially-built [space station](#) depicted in the film [2001: A Space Odyssey](#), directed by Stanley Kubrick in 1968. The spinning, double-wheel structure is based on a space station concept developed by Wernher [von Braun](#).

Kubrick's station in the movie is 560 meters (1,836 feet) in diameter, revolves to produce one-sixth Earth surface gravity, orbits 320 km (200 miles) above the Earth, and is home to an international contingent of scientists, passengers, and bureaucrats. The center of the station serves as a docking port for various space shuttles while the one completed outer ring houses living quarters, recreation and shopping areas, and meeting facilities.

Zusammengefasst:

- Durchmesser der Station: $d_a = 560 \text{ m}$
- Die Rotation bewirkt eine „künstliche Schwerkraft“, die einem Sechstel der Erdschwerkraft auf der Erdoberfläche bewirkt.
- Höhe der Umlaufbahn über der Erdoberfläche: $h = 320 \text{ km}$

Darüber hinaus treffen wir einige Annahmen:

- Masse der Raumstation: $m_S = 4,55 \cdot 10^8 \text{ kg}$
- Homogene Massenverteilung
- Masse ist komplett in den äußeren Ringen
- Innendurchmesser der Raumstation: $d_i = 460 \text{ m}$

1.1 Berechne ein Maß für die Stärke der Gravitationskraft der Erde in 320 km Höhe. Gib an, wie viel Prozent das im Vergleich zur Stärke der Gravitationskraft auf der Erdoberfläche sind.

$$\text{Erdradius: } r = \frac{12735 \text{ km}}{2} = 6367,5 \text{ km}$$

$$G_{320\text{km}}^x = \gamma \frac{M}{r^2} = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,3675 \cdot 10^6 \text{ m} + 3,2 \cdot 10^5 \text{ m})^2} = 8,9151 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = \mathbf{8,9151 \frac{m}{s^2}}$$

$$G_{\text{Erdoberfläche}}^x = \gamma \frac{M}{r^2} = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,3675 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 9,8336 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9,8336 \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{G_{320\text{km}}^x}{G_{\text{Erdoberfläche}}^x} = \frac{8,9151 \text{ m s}^{-2}}{9,8336 \text{ m s}^{-2}} = \mathbf{0,9066}$$

A: Die Stärke der Gravitationskraft beträgt noch etwa 91% der Wertes auf der Erdoberfläche.

1.2 Die erste Aufgabe hat gezeigt, dass die Erdschwerkraft auf der Raumstation noch eine große Wirkung hat. Erläutere, warum sich ein Raumfahrer auf einer nicht-rotierenden Raumstation trotzdem schwerelos fühlt.

A: Weil Zentrifugalkraft und Erdanziehungskraft gleich groß sind und sich aufheben.

1.3 Berechne, wie oft pro Tag die Raumstation die Erde umkreist.

Ansatz: Fallbeschleunigung gleich Zentripetalbeschleunigung

$$G_{320\text{km}}^x = \omega^2 r \Leftrightarrow G_{320\text{km}}^x = \frac{4\pi^2}{T^2} r \Leftrightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{r}{G_{320\text{km}}^x} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{G_{320\text{km}}^x}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{6,3675 \cdot 10^6 \text{ m}}{8,91505 \text{ m s}^{-2}}} = 2\pi \sqrt{714241,6476 \text{ s}^2} = 5310,10 \text{ s} = 88 \text{ min } 30 \text{ s}$$

$$1 \text{ d} = 24 \cdot 60 \text{ min} = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 86400 \text{ s}$$

$$n = \frac{5310 \text{ s}}{86400 \text{ s}} = \mathbf{16,27}$$

A: Die Raumstation schafft pro Tag etwas mehr als 16 Umrundungen der Erde.

1.4. In 320 km Höhe ist die Reibung durch die Restatmosphäre nicht zu vernachlässigen. Pro Tag verliert die Raumstation dadurch etwa 0,2% ihrer kinetischen Bahnenergie durch Reibung.

1.4.1 Berechne die Zeit, nach welcher die Raumstation die Hälfte ihrer potentiellen Energie verloren hat.

Aufstellen der Exponentialfunktion: $E(t) = E_0 \cdot 0,998^t$ (t in Tagen)

$$E(t_H) = \frac{E_0}{2} \quad E(t_H) = E_0 \cdot 0,998^{t_H} \quad \text{Gleichsetzen: } \frac{E_0}{2} = E_0 \cdot 0,998^{t_H} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0,998^{t_H} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,5) = \ln(0,998^{t_H}) \Leftrightarrow \ln(0,5) = t_H \cdot \ln(0,998) \Leftrightarrow t_H = \ln \frac{(0,5)}{\ln(0,998)} = \mathbf{346,2269 \text{ d}}$$

A: Es dauert 11,5 Monate bis die Raumstation nur noch die Hälfte ihrer potentiellen Bahnenergie hat.

1.4.2 In einer Höhe von 200 km wird die Reibung so stark, dass die Station abstürzen würde. Berechne die Bahngeschwindigkeit der Station in dieser Höhe.

Berechnung der Bahngeschwindigkeit für eine Umlaufbahn in 200 km Höhe:

Ansatz: Fallbeschleunigung gleich Zentripetalbeschleunigung

$$G^x = \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = G^x \cdot r$$

$$G_{200\text{km}}^x = \gamma \frac{M}{r^2} = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,3675 \cdot 10^6 \text{ m} + 2 \cdot 10^5 \text{ m})^2} = 9,2438 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{G_{200\text{km}}^x \cdot r} = \sqrt{\gamma \frac{M}{r^2} \cdot r} = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}}$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,3675 \cdot 10^6 \text{ m} + 2 \cdot 10^5 \text{ m}}} = 7791,58 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 28059 \text{ km/h}$$

1.5 Nehmen wir an, die Raumstation verliert auf einen Schlag ihre kinetische Bahnenergie. Berechne unter Vernachlässigung der Reibung die Geschwindigkeit, mit der die Raumstation auf der Erdoberfläche aufschlagen würde.

Die gesamte potentielle Energie wird in kinetische Energie beim Aufprall umgewandelt.

$$E_{Pot} = \gamma m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (= 1,3633 \cdot 10^{15} \text{ J}) \quad E_{Kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_{Kin} = E_{Pot}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \gamma m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad | : m \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2} v^2 = \gamma M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow v^2 = 2 \gamma M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v &= \sqrt{2\gamma M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \\ \Leftrightarrow v &= \sqrt{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \left(\frac{1}{6,3675 \cdot 10^6 \text{ m}} - \frac{1}{6,3675 \cdot 10^6 \text{ m} + 3,2 \cdot 10^5 \text{ m}} \right)} \\ \Leftrightarrow v &= \sqrt{6,463211 \cdot 10^6 \text{ kg m s}^{-2} \text{ m kg}^{-1}} = 2542,2846 \text{ m/s} = 9152 \text{ km/h} \end{aligned}$$

A: Die Aufprallgeschwindigkeit beträgt 2,5 km/s.

1.6 Erläutere, warum ein Raumfahrer auf der Raumstation eine „künstliche Schwerkraft“ von einem Sechstel der Erdschwerkraft fühlt. Erläutere außerdem, wie diese sich diese „künstliche Schwerkraft“ abhängig vom Aufenthaltsort auf der Raumstation verändert.

Im beschleunigten Bezugssystem Raumstation fühlt der Raumfahrer Zentrifugalkraft, die ihn in Richtung der Außenwände zieht. Die Außenwände ziehen ihn scheinbar an und sind aus seiner Sicht „unten“. Für ihn ist die Ursache der Kraft nicht erkennbar und von der Wirkung einer Schwerkraft unterscheidbar.

1.7 Berechne die Umlaufzeit der Raumstation für einen Umlauf um ihre eigene Achse.

Ansatz: 1/6 Erdbeschleunigung gleich Zentripetalbeschleunigung

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}g &= \omega^2 r \Leftrightarrow \frac{1}{6}g = \frac{4\pi^2}{T^2} r \Leftrightarrow T^2 = 24\pi^2 \frac{r}{g} \\ \Rightarrow T &= \pi \sqrt{24 \frac{r}{g}} = \pi \sqrt{24 \frac{280 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2}} = \pi \sqrt{685,0153 \text{ s}^2} = \mathbf{82,22 \text{ s}} \end{aligned}$$

A: Ein Umlauf dauert etwa 1 min 22 s.

1.8 Berechne den Rotationsdrehimpuls der Raumstation.

$$L = J \omega \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{6r}} = 0,07642 \text{ s}^{-1}$$

In der Näherung ist die Raumstation ein Hohlzylinder.

$$J = \frac{1}{2} m (R_i^2 + R_a^2) = \frac{1}{2} \cdot 4,55 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot ((230 \text{ m})^2 + (280 \text{ m})^2) = 2,987075 \cdot 10^{13} \text{ N m s}^2$$

$$L = J \omega = \frac{1}{2} m (R_i^2 + R_a^2) \cdot \omega = \frac{1}{2} \cdot 4,55 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot ((230 \text{ m})^2 + (280 \text{ m})^2) \cdot 0,07642 \text{ s}^{-1} = 2,2826 \cdot 10^{12} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

A: Der Rotationsdrehimpuls beträgt $2,3 \cdot 10^{12} \text{ Nms}$.

1.9 Ein Raumfahrer befindet sich in einem fensterlosen, hohen Raum am äußeren Rand eines der Ringe. Die „künstliche Schwerkraft“ dort entspricht genau der Schwerkraftwirkung auf der Mondoberfläche. Bearbeite eine der beiden Aufgaben:

1. Beschreibe ein Experiment, mit dem der Raumfahrer entscheiden kann, ob er sich auf der Raumstation oder auf dem Mond befindet. Erläutere die physikalischen Grundlagen. (Experimente der Art „Er schlägt ein Loch in die Wand“ gelten nicht.)

oder

2. Erläutere, warum der Raumfahrer nicht entscheiden kann, ob er sich auf der Raumstation oder auf dem Mond befindet.

Lösung:

1. Da der Raum hoch ist, verkürzt sich mit zunehmender Höhe über dem Boden des Raums der Radius signifikant und damit auch die Bahngeschwindigkeit aller Massenpunkte. Ein Ball, den der Raumfahrer von der Decke des Raums fallen lässt (oder senkrecht nach oben wirft), behält seine Bahngeschwindigkeit bei, während alle Massenpunkte um ihn herum schneller (bzw. langsamer) werden. Die lenkt ihn scheinbar gegen (bzw. in) die Rotationsrichtung ab. Es wirkt eine Corioliskraft. Auf dem Mond funktioniert dies nicht.