

Konstanten und Formeln:

Konstante	Wert	Konstante	Wert
Elementarladung	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	Masse Elektron	$m_e = 9,1093 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse Proton	$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	Masse Neutron	$m_n = 1,6750 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse Alphateilchen	$m_\alpha = 6,6447 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	Atommasse	$1 u = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse Goldatomkern	$m_{Au} = 196,97 u$	Ordnungszahl Gold	$Z_{Au} = 79$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 299792 \text{ km s}^{-1}$	Lichtjahr	$1 ly = 9,461 \cdot 10^{15} \text{ m}$
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} (\text{As})^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$		

Ein Elektronenvolt (eV) ist die Energie, welche ein Elektron aufnimmt, wenn es durch eine Spannung von 1 V beschleunigt wird.

Raumschiffdaten (werden für einige der folgenden Aufgaben benötigt):

Masse	$m_R = 40.000 \text{ t}$
Flügelspannweite	$l_R = 144 \text{ m}$
Querschnittsfläche von vorne/hinten	$A_R = 200 \text{ m}^2$
Breite (über alles)	$b_R = 144 \text{ m}$
Höhe (über alles)	$h_R = 62 \text{ m}$

Aufgabe 1: Sternenreise

Begeben wir uns auf eine Reise zu den Sternen! Uns steht ein fortschrittliches Raumschiff zur Verfügung, das in der Lage ist, jede beliebige Unterlichtgeschwindigkeit zu erreichen.

1.1: Im Van-Allen-Strahlungsgürtel

Der Van-Allen-Strahlungsgürtel ist ein Bereich um das Erdmagnetfeld mit höherer Belastung durch Sonnenwindteilchen, weil die Teilchen dort "gefangen" werden. Der Sonnenwind gehört zur sogenannten kosmischen Strahlung, welche eigentlich ein Teilchenstrom ist.

Ein schneller Sonnenwind besteht im wesentlichen zu etwa 95% aus Protonen und 5% Alphateilchen (Heliumkernen), die mit etwa 800 km/s von der Sonne ausgestoßen werden. In Erdnähe hat so ein Teilchenstrom eine Dichte von etwa 3 Teilchen pro Kubikzentimeter.

1.1.1: Berechne die kinetische Energie eines Protons und eines Alphateilchens aus einem schnellen Sonnenwind. Gib das Ergebnis auch in Elektronenvolt an.

$$1 \text{ eV} = 1 e \cdot 1 \text{ V} = 1 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A s} \frac{\text{Nm}}{\text{As}} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_{\text{Proton}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 6,4 \cdot 10^{11} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5,35232 \cdot 10^{-16} \text{ J} = 3341,02372 \text{ eV}$$

$$E_{\text{Alpha}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 6,6447 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 6,4 \cdot 10^{11} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,126304 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 13272,80899 \text{ eV}$$

A: Ein einzelnes Proton hat die kinetische Energie von etwa 3341 eV, ein einzelner Heliumkern hat die kinetische Energie von etwa 13273 eV.

1.1.2: Unser Raumschiff fliegt, noch in Erdnähe, mit der Sonne im Rücken und einer Geschwindigkeit von 10 km/s . Berechne die Energie, die unser Raumschiff pro Sekunde durch den Sonnenwind absorbiert, wenn wir annehmen, dass alle Teilchen an der Raumschiffhülle auf die Geschwindigkeit des Raumschiffs abgebremst werden.

Physik LK 12, Klausur 03 – Magnetismus/Bewegte Ladungen – Lösung 28.02.2011

Berechnung der Gesamtzahl der Teilchen, die in einer Sekunde das Raumschiff treffen:

Die Teilchen haben einen Geschwindigkeitsüberschuss von $\Delta v = 790 \text{ km/s}$ im Vergleich zum Raumschiff. In einer Sekunde durchquert ein Teilchen somit die Strecke von

$\Delta s = \Delta v \cdot \Delta t = 790 \text{ km s}^{-1} \cdot 1 \text{ s} = 790 \text{ km}$. Ein Teilchen, das weiter entfernt ist, kann das Schiff innerhalb einer Sekunde nicht mehr treffen.

Bei einer Querschnittsfläche von $A_R = 200 \text{ m}^2$ treffen also alle Teilchen aus dem Raumvolumen

$\Delta V = \Delta s \cdot A_R = 7,9 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot 200 \text{ m}^2 = 1,58 \cdot 10^8 \text{ m}^3$
das Raumschiff. Bei einer Dichte von $n = 3 \text{ cm}^{-3} = 3 \cdot 10^6 \text{ m}^{-3}$ sind das

$N = \Delta V \cdot \rho = 4,74 \cdot 10^{14}$ Teilchen. Davon sind

$N_{\text{Proton}} = N \cdot 0,95 = 4,503 \cdot 10^{14}$ Protonen und $N_{\text{Alpha}} = N \cdot 0,05 = 2,37 \cdot 10^{13}$ Alphateilchen.

Ein einzelnes Teilchen verringert seine Geschwindigkeit von 800 km/s auf 10 km/s. Die Energiedifferenz wird auf das Raumschiff übertragen. Da die Geschwindigkeit quadratisch in die kinetische Energie eingeht, wäre hier die Näherung, die 10 km/s zu vernachlässigen, akzeptabel.

$$\Delta E_{\text{Proton}} = 3341,024 \text{ eV} - \frac{1}{2} \cdot 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3341,024 \text{ eV} - 0,522 \text{ eV} = 3340,50 \text{ eV}$$

$$\Delta E_{\text{Alpha}} = 13272,809 \text{ eV} - \frac{1}{2} \cdot 6,6447 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 13272,809 \text{ eV} - 2,0739 \text{ eV} = 13270,74 \text{ eV}$$

Berechnung der Gesamtenergie:

$$\begin{aligned} \Delta E &= N_{\text{Proton}} \cdot \Delta E_{\text{Proton}} + N_{\text{Alpha}} \cdot \Delta E_{\text{Alpha}} \\ &= 4,503 \cdot 10^{14} \cdot 3340,50 \text{ eV} + 2,37 \cdot 10^{13} \cdot 13270,74 \text{ eV} \\ &= 1,5042 \cdot 10^{18} \text{ eV} + 3,1452 \cdot 10^{17} \text{ eV} = 1,8187 \cdot 10^{18} \text{ eV} = \mathbf{0,29136 \text{ J}} \end{aligned}$$

A: Pro Sekunde absorbiert das Raumschiff etwa 300 mJ aus der kinetischen Energie des Sonnenwinds.

1.1.3: Man kann dem Sonnenwind eine Stromstärke zuordnen. Stellen wir uns ein unsichtbares Kabel mit einem Durchmesser von 1 cm vor, das von der Sonne bis zur Erde reicht. Berechne die Stromstärke in diesem Kabel in Erdnähe.

Es gilt: $I = n v A q$. Es ist zu berücksichtigen, dass wir zwei unterschiedliche Ladungsträger haben. Der Strom setzt sich zu 95% aus Ladungen $q_{\text{Proton}} = e$ und zu 5% aus Ladungen

$q_{\text{Alpha}} = 2e$ zusammen. Also ist

$$\begin{aligned} I &= n_{\text{Proton}} \cdot v A q_{\text{Proton}} + n_{\text{Alpha}} \cdot v A q_{\text{Alpha}} = v A \cdot (n_{\text{Proton}} \cdot q_{\text{Proton}} + n_{\text{Alpha}} \cdot q_{\text{Alpha}}) = v A \cdot (0,95 n \cdot e + 0,05 n \cdot 2e) \\ &= v A \cdot (0,95 n \cdot e + 0,1 n \cdot e) = n v A \cdot 1,05 e = n v \pi r^2 \cdot 1,05 e \\ &= 3 \cdot 10^6 \text{ m}^{-3} \cdot 8 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1} \pi (0,005 \text{ m})^2 \cdot 1,05 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ &= 3 \cdot 10^6 \text{ m}^{-3} \cdot 8 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1} \pi (0,005 \text{ m})^2 \cdot 1,05 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 3,1707 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-3} \text{ m s}^{-1} \text{ m}^2 \text{ A s} \\ &= 3,1707 \cdot 10^{-11} \text{ A} = \mathbf{31,7 \text{ pA}} \end{aligned}$$

A: Die Stromstärke in diesem imaginären Kabel würde etwa 32 pA betragen.

1.1.4: Die Teilchen des Sonnenwinds können aufgrund ihrer kinetischen Energie beträchtliche Schäden verursachen, wenn sie auf ungeschützte Lebewesen treffen. Offenbar ist die Erde durch ihr Magnetfeld geschützt.

Erläutere diesen Schutzmechanismus mit dem zugrunde liegenden physikalischen Phänomen und beantworte außerdem folgende Fragen:

Kurz: Die geladenen Teilchen unterliegen der Lorentzkraft, die durch das Magnetfeld der Erde auf die Teilchen wirkt. Entsprechend werden die Teilchen senkrecht zu ihrer Flugbahn von der Erde abgelenkt.

- Von welchen Faktoren ist dieses Phänomen abhängig?

Von der Stärke und Richtung des Erdmagnetfeldes, von der Geschwindigkeit und Richtung der Sonnenwindteilchen, von der Ladung der Sonnenwindteilchen.

- Wieso spielt die Neigung der Erdachse eine Rolle?

Weil die magnetischen Pole des Magnetfeldes zur Zeit bei den geographischen Polen liegen und die Sonnenwindteilchen entlang der Magnetfeldlinien abgelenkt werden und so die Polregionen erreichen können.

- Durch welches physikalische Prinzip entsteht das Magnetfeld?

Bewegte Ladungen erzeugen ein Magnetfeld. Das flüssige Erdinnere besteht aus geladenen Teilchen, die Bewegung wird durch die Erdrotation und Konvektion hervorgerufen.

1.1.5: Im Van-Allen-Gürtel bewegen sich die Sonnenwindteilchen auf geschlossenen Kurven, die von Pol zu Pol führen. Die Protonen befinden sich im inneren Strahlungsgürtel in der Höhe von 100-10.000 km.

Stark vereinfacht nehmen wir eine kreisförmige Bahn mit dem Radius 5000 km und ein homogenes Erdmagnetfeld mit der Flussdichte von $1,6705 \cdot 10^{-9} \text{ T}$ an.

Berechne aus diesen Daten die Masse eines Protons.

Ansatz: Lorentzkraft gleich der Zentripetalkraft der Kreisbewegung.

$$F_L = F_Z \Leftrightarrow e v B = m \frac{v^2}{r}$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{e B r}{v} = \frac{1,6705 \cdot 10^{-9} \text{ T} \cdot 5 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{8 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}}$$
$$= 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg A}^{-1} \text{ s}^{-2} \text{ A s} = \mathbf{1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}$$

A: Die berechnete Masse des Protons beträgt $1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

1.2: Besuch beim Jupiter

Bevor wir das Sonnensystem verlassen, müssen wir natürlich beim Jupiter vorbeischaun. Mit 320 Erdmassen ist er mehr als doppelt so schwer wie allen anderen Planeten zusammen. Seine Magnetosphäre ist sogar die größte permanente Struktur im Sonnensystem und reicht bis zur Saturnbahn. Das Magnetfeld ist ca. 14-mal stärker als das Magnetfeld der Erde.

Wir fliegen antriebslos mit einer Geschwindigkeit von 50 km/s über den Nordpol des Jupiters. Um der schönen Aussicht willen beträgt unser Abstand 800 km. Hier hat das Magnetfeld eine Stärke von 1 mT .

1.2.1: Aufgrund eines technischen Defekts hat sich die Raumschiffhülle elektrisch mit 80 C negativ aufgeladen. An unserer aktuellen Position stehen die Magnetfeldlinien senkrecht zu uns und ihre Richtung zeigt vom Jupiter weg.

Berechne Richtung (relativ zur Flugrichtung) und Betrag der Beschleunigung, die unser Raumschiff erfährt.

Das sich bewegende Raumschiff entspricht einem Strom entgegen der Flugrichtung. Nach der Drei-Finger-Regel wird es dann nach links abgelenkt.

$$F_L = qvB = 80 \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 4000 \text{ A s m s}^{-1} \text{ kg A}^{-1} \text{ s}^{-2} = 4000 \text{ kg m s}^{-2} = 4 \text{ kN}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{4000 \text{ N}}{40.000.000 \text{ kg}} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$$

A: Das Raumschiff erfährt eine Beschleunigung von $\frac{1}{10} \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$ und wird nach links abgelenkt.

1.2.2: Das Problem ist schnell beseitigt. Unser Raumschiff ist wieder elektrisch neutral und setzt seinen Überflug fort.

Weniger aus praktischen Gründen, sondern damit es schnittiger aussieht, hat unser Raumschiff Flügel. Es fliegt nun in nur 300 km Höhe von Osten nach Westen. In den äußeren Schichten der Jupiteratmosphäre ist es jetzt doch nicht schlecht, Flügel zu haben.

Die Raumschiffhülle ist komplett metallisch. Die Flussdichte des jupitermagnetischen Feldes beträgt $0,8 \text{ mT}$. Der Vektor \vec{B} bildet mit unseren Tragflächen einen Winkel von 75° . Die horizontale Komponente \vec{B}^* von \vec{B} soll exakt von Süden nach Norden weisend angenommen werden.

1.2.2.1: Berechne die Spannung der Flügelspitzen gegeneinander. Welcher Flügel wird positiv geladen?

Lösung wie im Übungsbuch:

Jedes Elektron im Flügel erfährt die Kraft $F_L = -e \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ mit dem Betrag $F_L = e v B$. \vec{F} hat in Flügelrichtung die Komponente \vec{F}_1 mit dem Betrag $F_1 = F \cos(90^\circ - 75^\circ)$. Im Bezugssystem des Raumschiffs entsteht ein elektrisches Feld \vec{E} , das in Richtung der Tragflächen die Komponente \vec{E}_1 hat. Es gilt: $e E_1 = F_1 = F \cos(15^\circ) = e v B \cos(15^\circ)$

$\Leftrightarrow E_1 = v B \cos(15^\circ)$. Damit beträgt die Spannung zwischen den Flügelspitzen

$$U = l_R E_1 = l v B \cos(15^\circ) = 144 \text{ m} \cdot 5 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1} \cdot 8 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot \cos(15^\circ) \\ = 5,5637 \cdot 10^3 \text{ m m s}^{-1} \text{ V s m}^{-2} = \mathbf{5,57 \text{ kV}}$$

Alternative Rechnung:

$$F_L = F_C \text{ mit } F_L = e v B \sin(\alpha) ; F_C = e E ; E = U d^{-1} = U l^{-1}$$

$$e E = e v B \sin(\alpha) \Leftrightarrow U = l v B \sin(\alpha) = 144 \text{ m} \cdot 5 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1} \cdot 8 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot \sin(75^\circ) \\ = 5,5637 \cdot 10^3 \text{ m m s}^{-1} \text{ V s m}^{-2} = \mathbf{5,57 \text{ kV}}$$

A: Die Spannung beträgt 5,57 kV und der linke Flügel wird positiv geladen.

1.2.2.2: Erläutere den Hall-Effekt. Beantworte auch diese Fragen:

- Wann tritt dieser Effekt auf?

Durch ein Leiterplättchen in einem Magnetfeld fließt horizontal ein Strom. Die Magnetfeldlinien durchdringen das Plättchen senkrecht zur Plättchenfläche. Auf jeden einzelnen Ladungsträger wirkt die Lorentzkraft und im Mittel sammeln sich mehr Ladungsträger oben oder unten am Plättchenrand. Dadurch entsteht ein elektrisches Feld, dessen elektrostatische Kraft der Lorentzkraft entgegenwirkt, bis ein Kräftegleichgewicht herrscht. Diesem elektrischen Feld ist eine Spannung zugeordnet, die sogenannte Hall-Spannung.

- Wovon ist er abhängig?

Von der Leitergeometrie und vom Leitermaterial, vom angelegten Strom und vom Magnetfeld.

- Wofür kann man sich diesen Effekt zunutze machen?

Die Hall-Spannung kann man vergleichsweise leicht messen. Wenn alle anderen Parameter bekannt sind, kann man aus der gemessenen Spannung auf die Stärke des Magnetfeldes schließen. Der Effekt kann also zur Magnetfeldmessung benutzt werden. Eine Hall-Sonde ist ein solches Messgerät, das den Hall-Effekt ausnutzt.

- Inwiefern ist die Situation der Aufgabe anwendbar für das Auftreten dieses Effekts?

Das Flugzeug stellt das Plättchen dar. Statt eines anliegenden Stroms bewegt sich das gesamte Plättchen. Im Bezugssystem des Magnetfeld handelt es sich aber jeweils um bewegte Ladungen.

1.3: Reise zu AXP 1E 1048-59

Wir haben das Sonnensystem verlassen und sind zu den Sternen unterwegs. Weil unser Raumschiff dabei konstant mit 1 g beschleunigen kann, hat die Mannschaft einerseits eine angenehme Simulation der Erdschwerkraft und wegen der relativistischen Effekte der Zeitdehnung bei schnellen Geschwindigkeiten ist so eine Reise auch in einem Menschenleben machbar. (Zuhause vergeht allerdings deutlich mehr Zeit). Unser Ziel ist der Magnetar AXP 1E 1048-59 in Richtung des Sternbildes Carina, der etwa 9000 Lichtjahre von der Erde entfernt ist.

1.3.1: Bei hohen Geschwindigkeiten ist die kosmische Strahlung ein echtes Problem. Diese Teilchen stammen von anderen Sternen, aber auch von Sternexplosionen oder aus den aktiven Zentren anderer Galaxien. Gerade Teilchen aus den letzten beiden Quellen sind deutlich energiereicher als der Sonnenwind und 1% der Strahlung besteht aus schweren Atomkernen.

1.3.1.1: Unser Raumschiff hat ein Magnetfeld als Schutzschild. Es ist in der Lage, bei einer Eigengeschwindigkeit von $0,2c$ jeden Goldatomkern mit einer Maximalgeschwindigkeit von $0,7c$ innerhalb von 100 km so abzulenken, dass das Schiff nicht getroffen wird. Wir nehmen folgende starke Vereinfachungen vor:

- Das Magnetfeld ist homogen.
- Innerhalb der Flugbahn kann die Richtung der Magnetfeldlinien immer senkrecht zur Flugrichtung des Goldatomkerns angenommen werden.

Berechne die notwendige minimale Flussdichte des Magnetfeldes.

Da die Magnetfeldlinien immer senkrecht zur Flugrichtung des Goldatomkerns stehen, kann auf eine vektorielle Rechnung verzichtet werden.

Es gilt also: $F_L = qvB \Leftrightarrow B = \frac{F_L}{qv}$ mit

$$q = 79e = 79 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 1,26558 \cdot 10^{-17} \text{ C} \quad \text{und der Relativgeschwindigkeit}$$
$$v = v_{\text{Schiff}} + v_{\text{Au}} = 0,7c + 0,2c = 0,9c = 2,698128 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

Die Lorentzkraft muss so groß sein, dass die Querschleunigung der Goldatomkerne ausreicht, um vom Schiff abgelenkt zu werden. Da wir die räumliche Orientierung des Schiffes nicht kennen, müssen wir von der maximalen Ausdehnung des Schiffes ausgehen. Dies ist die Flügelspannweite von $l_R = 144\text{ m}$. Bei einem homogenen Magnetfeld werden auch Teilchen vom Rand zur Mitte gelenkt. Wir müssen daher einerseits mit der Querschleunigung die kompletten 144 m erreichen und andererseits zusätzlich annehmen, dass außerhalb des Bereichs vor dem Schiff kein Magnetfeld vorhanden ist, sonst würden auch Teilchen von außerhalb der eigentlichen Flugbahn zum Schiff gelenkt werden.

Berechnung der Zeit Δt , die zur Verfügung steht, aus der Relativgeschwindigkeit und der Vorgabe, dass die Teilchen innerhalb 100 km abgelenkt werden müssen.

Geradlinige Bewegung von Raumschiff und Teilchen:

$$\Delta t = s v^{-1} = 100 \text{ km} \cdot (0,9 c)^{-1} = 1 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot 3,70627 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1} \text{ s} = 3,70627 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,37 \text{ ms}$$

Beschleunigte Querbewegung der Goldatomkerne:

$$s = 2^{-1} a t^2 \Leftrightarrow a = 2 s t^{-2} = 2 \cdot 144 \text{ m} \cdot (3,70627 \cdot 10^{-4} \text{ s})^{-2} = 2,096611 \cdot 10^9 \text{ m s}^{-2}$$

$$F = m a = 196,97 \cdot 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 2,096611 \cdot 10^9 \text{ m s}^{-2} = 6,857359 \cdot 10^{-16} \text{ N}$$

Diese Lorentzkraft muss so groß sein wie diese Kraft. Also

$$\begin{aligned} B &= \frac{F_L}{q v} = \frac{6,857359 \cdot 10^{-16} \text{ N}}{1,26558 \cdot 10^{-17} \text{ C} \cdot 2,698128 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 2,0081896 \cdot 10^{-7} \text{ N C}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ s} \\ &= 20 \cdot 10^{-6} \text{ kg m s}^{-2} \text{ A}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ s} = 20 \mu \text{ T} \end{aligned}$$

A: Das Magnetfeld sollte größer als 21 μT sein.

1.3.1.2: Vielleicht wäre es nicht schlecht, Teilchen durch ein radiales elektrisches Feld zusätzlich abzubremsen. Angenommen, dieses Feld würde durch eine geladene Kugel an der Spitze des Raumschiffs erzeugt. Berechne die Mindestladung dieser Kugel, um unter den Bedingungen von Aufgabe 1.3.1.1 die kinetische Energie des Goldatomkerns zu halbieren.

Die halbe kinetische Energie $\frac{E_{\text{kin}}}{2} = \frac{1}{4} \cdot m v^2$ muss der Energiedifferenz im radialsymmetrischen elektrischen Feld $-W_{21} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$ entsprechen. Also

$$-\frac{1}{4} \cdot m v^2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \Leftrightarrow Q = -\frac{m v^2 \cdot \pi \epsilon_0}{q \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)}$$

Da alle Teilchen durch das Magnetfeld so abgelenkt werden, dass das Schiff nicht getroffen wird, beträgt der Mindestabstand der Teilchen von der Ladung am Bug 72 m. Dabei vernachlässigen wir allerdings, dass die Abstoßungskraft nicht immer der Geschwindigkeit entgegen gerichtet ist.

Wir setzen also $r_2 = 100 \text{ km}$ und $r_1 = 72 \text{ m}$. Dann ist

$$\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \left(\frac{1}{1 \cdot 10^5 \text{ m}} - \frac{1}{72 \text{ m}} \right) = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1} - 1,33889 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1} = -1,33889 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{196,97 \cdot 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (2,698128 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1})^2 \cdot \pi \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12} (\text{As})^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}}{1,26558 \cdot 10^{-17} \text{ C} \cdot (-1,33889) \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}} \\ &= 3,767959 \frac{\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}}{\text{C m}^{-1}} = 3,77 \text{ C} \end{aligned}$$

A: Die Kugel benötigt eine Ladung von 3,77 C.

1.3.2: Ein wichtiger Bestandteil der fortschrittlichen Antriebstechnik unseres Raumschiffs ist ein riesiger Kondensator. Leider verursacht ein Leckstrom einen Spannungsverlust.

Der Kondensator hat die Kapazität $C = 1 \text{ mF}$ und normalerweise eine Spannung von

$U_0 = 3 \text{ kV}$. Der Leckstrom entlädt den Kondensator über einen Widerstand von $R = 2 \text{ M}\Omega$.

Die Spannung in Abhängigkeit von der Zeit bei der Entladung eines Kondensators folgt dem

Gesetz $U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$.

1.3.2.1: Berechne die Spannung des Kondensators nach 1h.

Tippfehler: Eigentlich sollte $C = 10 \text{ mF}$ sein. Daher ist das Ergebnis viel kleiner als eigentlich geplant.

$$U(3600 \text{ s}) = 3 \text{ kV} \cdot e^{-\frac{3600 \text{ s}}{2 \cdot 10^6 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-3} \text{ F}}} = 3000 \text{ V} \cdot e^{-1,8} = 495,8967 \text{ V}$$

A: Nach 1 h ist die Spannung auf etwa 496 V gesunken.

1.3.2.2: Berechne, nach welcher Zeit die Spannung unter 1000 V gesunken ist.

Sei t_1 die gesuchte Zeit und U_1 die gegebene Stromstärke. Mathematisch gesehen suchen wir die x-Koordinate des Punktes $(t_1 | U_1)$ der Funktion $U(t)$.

Setze den Punkt in die Funktionsgleichung ein:

$$U_1 = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t_1} \quad | \quad : U_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_1}{U_0} = e^{-\frac{1}{RC}t_1} \quad | \quad \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{U_1}{U_0}\right) = -\frac{1}{RC} \cdot t_1 \quad | \quad \cdot (-RC)$$

$$\Leftrightarrow -RC(\ln(U_1) - \ln(U_0)) = t_1$$

$$\Leftrightarrow t_1 = RC \cdot (\ln(U_0) - \ln(U_1))$$

Zahlen einsetzen: $U_0 = 3 \cdot 10^3 \text{ V}$, $R = 2 \cdot 10^6 \Omega$, $C = 1 \cdot 10^{-3} \text{ F}$, $U_1 = 1000 \text{ V}$

$$\Leftrightarrow t_1 = 2 \cdot 10^6 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-3} \text{ F} \cdot (\ln(3 \cdot 10^3 \text{ V}) - \ln(1 \cdot 10^3 \text{ V}))$$

$$\Leftrightarrow t_1 = 2 \cdot 10^3 \text{ V A}^{-1} \text{ s V}^{-1} \cdot (\ln(3000) + \ln(\text{V}) - \ln(1000) - \ln(\text{V}))$$

$$\Leftrightarrow t_1 = 2000 \text{ s} \cdot (\ln(3000) - \ln(1000))$$

$$\Rightarrow t_1 \approx 2000 \text{ s} \cdot (1,09861)$$

$$\Leftrightarrow t_1 \approx 2197 \text{ s}$$

A: Nach etwa 37 min ist die Spannung unter 1000 V gesunken.

1.3.2.3: Berechne mit Hilfe dieses Gesetzes, wie viel Ladung zu Beginn auf dem Kondensator war.

$$\begin{aligned} Q(0) &= \int_0^{\infty} I(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{U(t)}{R} dt = \int_0^{\infty} \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} dt = \frac{U_0}{R} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{RC}t} dt = \frac{U_0}{R} \left[-RC e^{-\frac{1}{RC}t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{U_0}{R} (0 - (-RC \cdot 1)) = U_0 C \\ &= 3000 V \cdot 0,001 F = 3 \frac{V \cdot C}{V} = 3 C \end{aligned}$$

A: Zu Beginn waren 3 C auf dem Kondensator.