

Mathematik Grundkurs 11 m1, HÜ 01 – Funktionsuntersuchung – Lösung 15.09.2020

Aufgabe 1: Schreibe alle Teilaufgaben auf, die zu einer vollständigen Funktionsuntersuchung gehören. (So wie im Unterricht festgelegt).

- 0.) Erste, zweite und ggf. dritte Ableitung bilden.
- 1.) Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen berechnen.
- 2.) Grenzwertverhalten angeben.
- 3.) Symmetrieverhalten untersuchen.
- 4.) Hoch- und Tiefpunkte bestimmen.
- 5.) Wendepunkte bestimmen.
- 6.) Gleichungen der Wendetangenten bestimmen.
- 7.) Ergebnisse benutzen und Graphen skizzieren

Aufgabe 2: Berechne die Funktionsgleichungen aller Wendetangenten der Funktion

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$$

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 2$$

$$f''(x) = 24x - 6$$

$$f'''(x) = 24$$

Notwendige Bedingung: $f''(x_w) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 24x_w - 6 \quad | -24x_w \\ \Leftrightarrow -24x_w &= -6 \quad | :(-24) \\ \Leftrightarrow x_w &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: $f'''(x_w) \neq 0$

$$f'''\left(\frac{1}{4}\right) = 24 > 0 \Rightarrow \text{Rechts- nach Linkskurve.}$$

y-Koordinate des Wendepunkts bestimmen:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{4}{64} - \frac{3}{16} - \frac{2}{4} + 1 = \frac{1}{16} - \frac{3}{16} - \frac{8}{16} + \frac{16}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Also WP $\left(\frac{1}{4} \mid \frac{3}{8}\right)$

Tangentengleichung: $g_t(x) = m_t x + n_t$

$$m_t = f'(x_w) = f'\left(\frac{1}{4}\right) = 12 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - 2 = \frac{12}{16} - \frac{6}{4} - 2 = \frac{3}{4} - \frac{6}{4} - \frac{8}{4} = -\frac{11}{4}$$

Setze Koordinaten des Wendepunkts in Tangentengleichung ein: $\frac{3}{8} = -\frac{11}{4} \cdot \frac{1}{4} + n_t \quad | +\frac{11}{16}$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{16} + \frac{11}{16} = n_t \Leftrightarrow \frac{17}{16} = n_t \quad \text{Also } g_t(x) = -\frac{11}{4}x + \frac{17}{16}$$