Mathematatik GK 11 m1, 1. Kursarbeit – Funktionen – Lösung **09.12.2019**

Funktionen

Aufgabe 1: Kreuze hier auf dem Blatt alle Aussagen an, die wahr sind. Pro Block gibt es eine Maximalpunktzahl von Punkten und pro falsch oder nicht gesetztem Kreuz wird ein Punkt abgezogen.

Aussage	**wahr**
Eine Funktion ist immer eine Zuordnung von einer Zahl zu einer Zahl.	
Jede Funktion ist eine Abbildung.	x
Funktionen sind nur eindeutig, wenn sie eine Umkehrabbildung besitzen.	

Aussage	**wahr**
Der Graph einer Funktion ist eine Punktmenge, deren Punkte bestimmte Kriterien erfüllen.	x
Jede Funktion hat auch einen Graphen.	x
Am Graphen einer Funktion kann man nicht erkennen, ob die Funktion eine Umkehrfunktion besitzt.	

Aussage	**wahr**
Jede Funktion besitzt auch Nullstellen.	
Die Nullstelle einer Funktion ist der Punkt, in dem der Graph der Funktion die x-Achse schneidet.	
Eine Funktion kann auch mehrere Nullstellen haben.	x
Nullstellen sind Elemente der Zielmenge.	

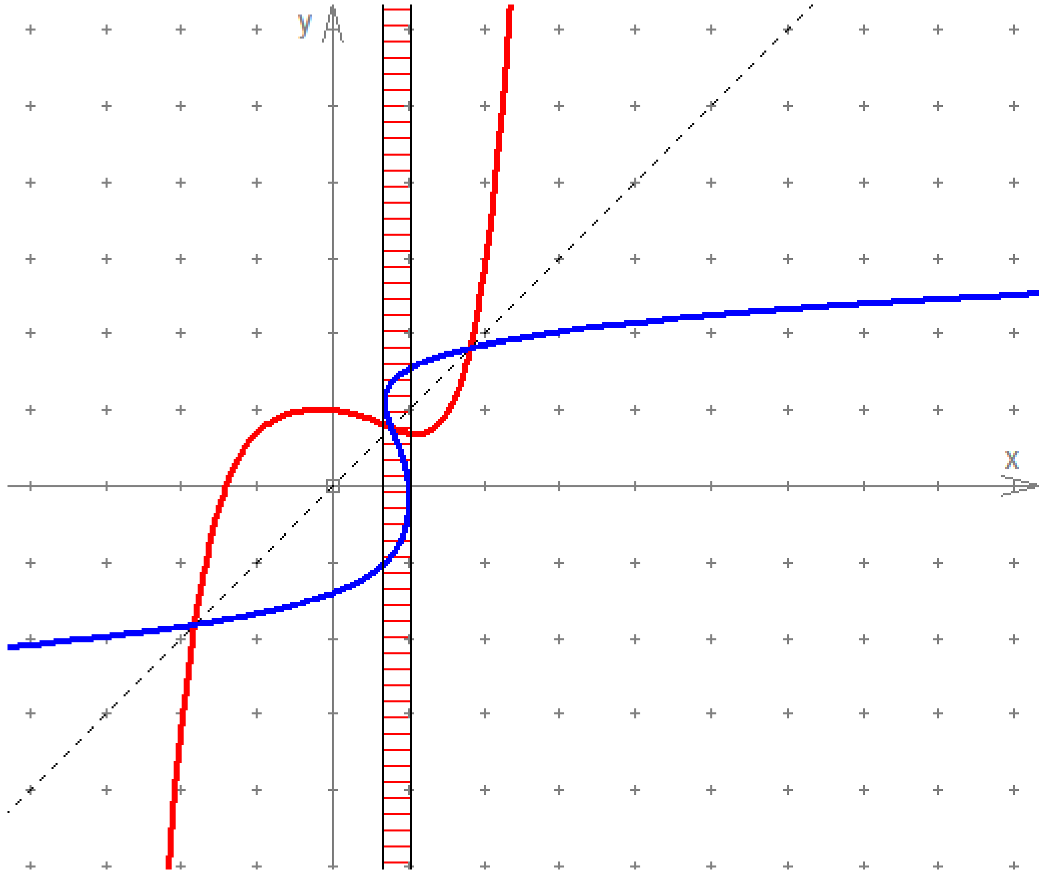
Aussage	**wahr**
Eine Funktion, die keine Defintionslücken hat, ist auch stetig.	
Eine stetige Funktion erfüllt für alle Stellen der Definitionsmenge ein bestimmtes Grenzwertkriterium.	x
Für nicht-stetige Funktionen kann man die Grenzwerte $x \to \pm\infty$ nicht bilden.	
An der Stelle, wo die Funktion nicht stetig ist, kann man nicht die momentane Steigung bestimmen.	x

Aussage	**wahr**
Wählt man verschiedene Intervalle für die durchschnittliche Steigung aus, so erhält man üblicherweise unterschiedliche Ergebnisse.	x
Bei einer linearen Funktion ist die durchschnittliche Steigung für jedes Intervall gleich der momentanen Steigung an den Intervallgrenzen.	x
Jede Funktion hat irgendwo eine Stelle, wo man die momentane Steigung bestimmen kann.	

Mathematik GK 11 m1, 1. Kursarbeit – Funktionen – Lösung **09.12.2019**

Umkehrabbildungen

Aufgabe 2: Bestimme zeichnerisch die Umkehrabbildung für den folgenden Funktionsgraphen. Entscheide, ob es sich um eine Umkehrfunktion handelt. Falls es sich bei der Umkehrabbildung nicht um eine Funktion handelt, markiere die kritischen Bereiche des Graphen, welche die Ursache dafür sind.



Aufgabe 3: Bilde rechnerisch die Umkehrabbildung zu den gegeben Funktionen. Begründe mit Hilfe der Rechnung, ob es sich um eine Umkehrfunktion handelt. *Eine vollständige Rechnung ist erforderlich!*

3.1 $f(x)=-\frac{1}{4}x+6$ $y=-\frac{1}{4}x+6 \quad \mid -6$ $\Leftrightarrow \; y-6=-\frac{1}{4}x \quad \mid \cdot(-4)$ $\Leftrightarrow \; -4y+24=x$ $\mathbf{f^{-1}(x)=-4x+24}$	**3.2** $f(x)=2x^2-4x+2$ $y=2x^2-4x+2 \quad \mid -y$ $\Leftrightarrow \; 0=2x^2-4x+2-y \quad \mid :2$ $\Leftrightarrow \; 0=x^2-2x+\frac{2-y}{2}$ p-q-Formel: $x_{1/2}=1\pm\sqrt{1^2-\frac{2-y}{2}}$ Keine Umkehrfunktion, da zwei Lösungen.

<u>Aufgabe 4:</u> Polynomdivision und Nullstellen

<u>4.1</u> Berechne $(6x^6+4x^5+6x^4+4x^3+8x^2+10):(3x^4+2x^3+4)$

$$(6x^6+4x^5+6x^4+4x^3+8x^2+10):(3x^4+2x^3+4)=2x^2+2+\frac{2}{3x^4+2x^3+4} \quad (=2x^2+2 \text{ Rest } 2)$$

$$\begin{array}{l} -\underline{(6x^6+4x^5 \qquad\qquad +8x^2)} \\ \qquad\qquad 6x^4+4x^3 \\ \qquad\quad -\underline{(6x^4+4x^3 \qquad\quad +8)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \end{array}$$

<u>4.2</u> Berechne die Nullstellen der Funktion $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$

$$0=-\frac{1}{2}x_n+2 \quad |-2 \;\Leftrightarrow\; -2=-\frac{1}{2}x_n \quad |\cdot(-2) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{4=x_n}$$

<u>4.3</u> Berechne die Nullstellen der Funktion $g(x)=2x^2-x-4$

$$0=2x_n^2-x_n-4 \quad |:2 \;\Leftrightarrow\; 0=x_n^2-\frac{1}{2}x_n-2 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$\Rightarrow\; x_{1/2}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+2}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{33}{16}}=\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{33}}{4} \;\Rightarrow\; \mathbf{x_1=\frac{1-\sqrt{33}}{4}\;;\; x_2=\frac{1+\sqrt{33}}{4}}$$

<u>4.4</u> Berechne die Nullstellen der Funktion $h(x)=x^5+3x^4-6x^3-8x^2$

$0=x_n^5+3x_n^4-6x_n^3-8x_n^2=x_n^2\cdot(x_n^3+3x_n^2-6x_n-8)$ Damit ist $\mathbf{x_1=0}$ eine doppelte Nullstelle.

Setze die Klammer gleich 0: $0=x_n^3+3x_n^2-6x_n-8$ Finde $\mathbf{x_2=2}$ durch Probieren.

Polynomdivision:	$0=x_n^2+5x_n+4$ p-q-Formel
$\begin{array}{l} (x^3+3x^2\;-6x-8):(x-2)=x^2+5x+4 \\ -\underline{(x^3-2x^2)} \\ \quad -\underline{(5x^2-10x)} \\ \qquad\quad 4x \\ \qquad -\underline{(4x-8)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} \Rightarrow\; x_{3/4}=-2{,}5\pm\sqrt{2{,}5^2-4}=-2{,}5\pm\sqrt{2{,}25} \\ \qquad =-2{,}5\pm1{,}5 \\ \Rightarrow\; \mathbf{x_3=-4\;;\; x_4=-1} \end{array}$

<u>4.5</u> Berechne die Nullstellen der Funktion $h(x)=e^{x^2}-1$

$$\begin{array}{ll} & 0=e^{x_n^2}-1 \quad | +1 \\ \Leftrightarrow & 1=e^{x_n^2} \quad | \ln() \\ \Leftrightarrow & \ln(1)=\ln(e^{x_n^2}) \quad | T \\ \Leftrightarrow & 0=x_n^2 \quad | \sqrt{\;} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x_n=0} \end{array}$$

Mathematik GK 11 m1, 1. Kursarbeit – Funktionen – Lösung 09.12.2019

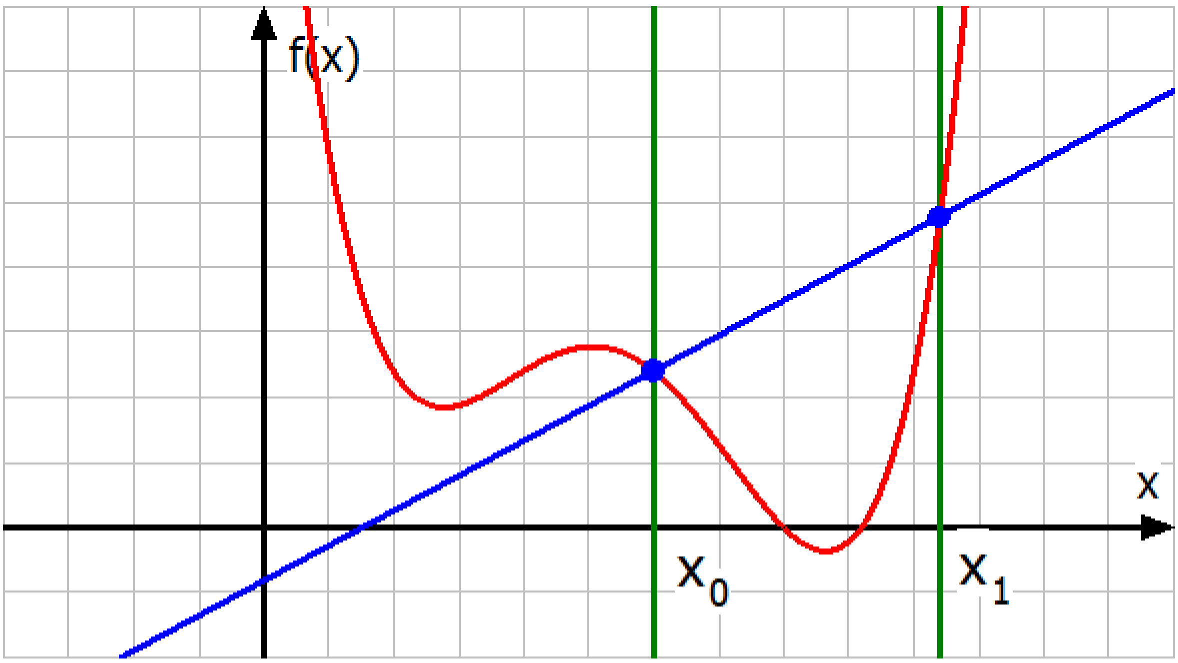
Durchschnittliche und momentane Steigungen

Aufgabe 5: Erkläre die Bedeutung des Grenzwertes $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ und von $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (andere Schreibweise des gleichen Grenzwertes).

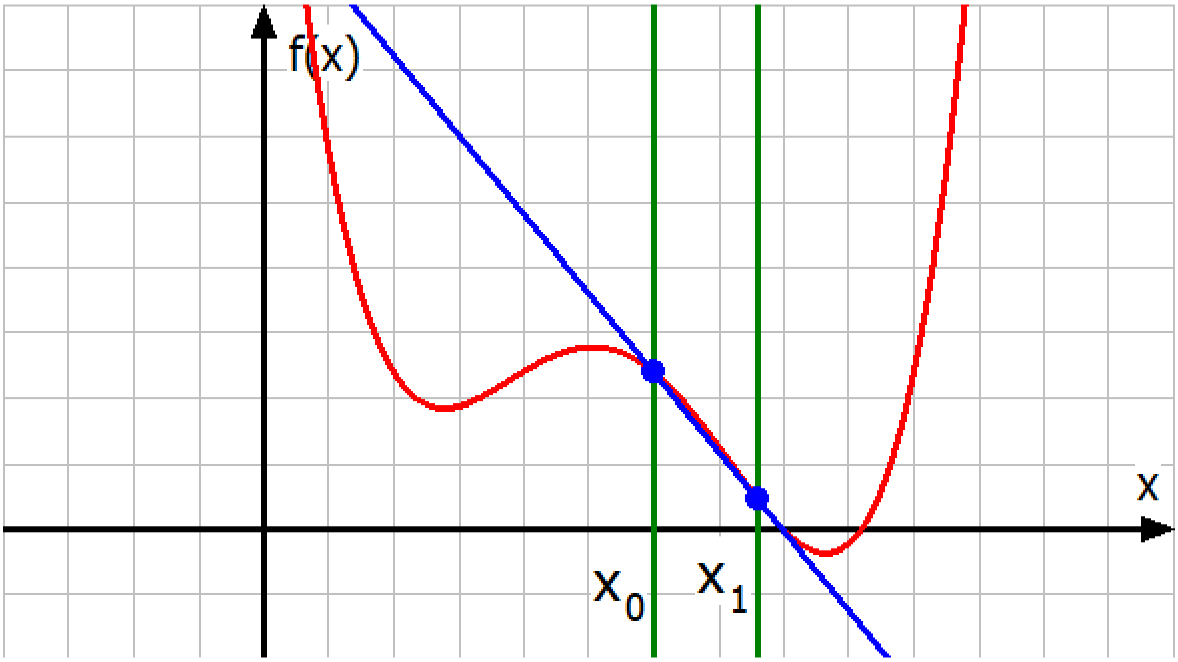
Erkläre außerdem, wie dieser Grenzwert im Unterricht hergeleitet wurde. Fertige dazu eine kleine Skizze an.

Der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ gibt die momentane Änderungsrate (Steigung) der Funktion *f* an der Stelle x_0 an, falls dieser Grenzwert existiert.

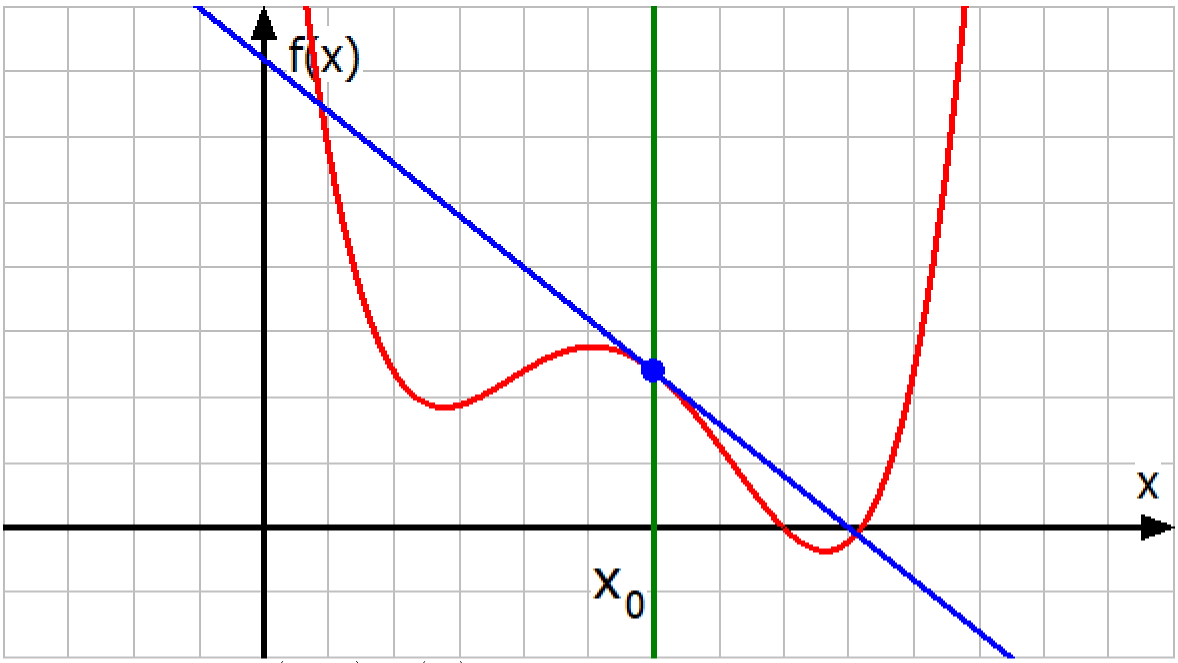
Ohne Grenzwertbildung kann man nur durchschnittliche Steigungen eines Graphen zwischen zwei Stellen (in einem Intervall) berechnen. Dies geschieht mit Hilfe des Steigungsdreiecks. Wenn x_0 und x_1 die Grenzen dieses Intervalls sind, dann ist $m_{01} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ die durchschnittliche Steigung in diesem Intervall. Diese durchschnittliche Steigung entspricht der Steigung der Geraden durch die Punkte $(x_0|f(x_0))$ und $(x_1|f(x_1))$. Eine solche Gerade heißt <u>Sekante</u>.



Diese durchschnittliche Steigung ist keine gute Annäherung für die momentane Steigung an der Stelle x_0. Idee: x_1 wird näher an x_0 herangeführt.



Jetzt passt es zwar besser, aber letztlich wird jede berechnete durchschnittliche Steigung nur eine Näherung an die gesuchte momentane Steigung sein.
Lösung: Man führt x_1 „unendlich" nahe an x_0 heran. Mathematik geschieht dies durch die Grenzwertbildung $\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ und grafisch wird so aus der Sekante die Tangente.



Die Schreibweise $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ergibt sich, wenn man statt mit der rechten Intervallgrenze x_1 mit der Intervallbreite *h* arbeitet.

<u>Aufgabe 6:</u> Steigungen berechnen

<u>6.1</u> Berechne die durchschnittliche Steigung für die Funktion $f(x)=2x^2+4$ im Intervall $[1;8]$.

$$\boldsymbol{m_{18}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(8)-f(1)}{8-1}=\frac{(2\cdot 8^2+4)-(2\cdot 1^2+4)}{7}=\frac{132-6}{7}=\frac{126}{7}=\mathbf{18}$$

<u>6.2</u> Berechne die momentane Steigung für die Funktion $f(x)=2x^3+4$ an der Stelle $x_0=2$ mit Hilfe des Grenzwertes $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f'(2)}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)^3+4-(2\cdot 2^3+4)}{h}=2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h}\\&=2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2^3+3\cdot 2^2h+3\cdot 2h^2+h^3-2^3}{h}=2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{12h+6h^2+h^3}{h}\\&=2\cdot\lim_{h\to 0}12+6h+h^2=2\cdot(12+0+0)=\mathbf{24}\end{aligned}$$