Musterlösung Aufgabe 2 (Stochastik)

A	AFB	Lösung	Punkte
a)	II	(1) $\binom{10}{5}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = 2520$ (2) $3! = 6$ (3) $9 \cdot \binom{8}{5}\binom{3}{3} = 504$ (4) $\binom{8}{3}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = 560$ (5) $\binom{8}{5}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = 560$	7,5 (je 1,5)
b)	I-II	Ereignis A: Sowohl die Mechanik als auch die Mine sind defekt. Es bezeichne: K: defekte Mechanik E: defekte Mine Nach Voraussetzung gilt: $P(K) = 0{,}03$, $P(E) = 0{,}02$ Unmittelbar aus der Definition der Unabhängigkeit oder mit Hilfe eines Baumdiagramms folgt: $P(A) = P(K \cap E) = P(K) \cdot P(E) = 0{,}0006 = 0{,}06\%$.	3
c)	I	Ereignis B: Der Kugelschreiber ist fehlerfrei. $P(B) = P(\overline{K} \cap \overline{E}) = P(\overline{K}) \cdot P(\overline{E}) = 0{,}97 \cdot 0{,}98 = 0{,}9506 \approx 95\%$.	2,5
d)	I-II	Mindestens ein Kugelschreiber ist defekt: Es beschreibe X die Anzahl der fehlerhaften Kugelschreiber. Die Prüfung von n Kugelschreibern kann als Bernoulli-Kette der Länge n angesehen werden. Es handelt sich offensichtlich um eine Massenproduktion, die Fehler treten nach Aufgabenstellung unabhängig voneinander auf, so dass von einer konstanten Trefferwahrscheinlichkeit von $p = 0{,}05$ ausgegangen werden kann. Die Zufallsvariable X ist demnach binomialverteilt. Hier gilt: $n = 10$, $p = 0{,}05$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{10} = 1 - 0{,}5987 \approx 0{,}4013 \approx 40{,}1\%$. *Das Ergebnis kann auch mithilfe der Tafel bestimmt werden.* Ist $n = 10$, so ist in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 40 % mindestens ein fehlerhafter Kugelschreiber enthalten.	2,5
e)	II-III	Im Folgenden ist n zu bestimmen. Es soll gelten: $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$. Aus $P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}95^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq \frac{-2}{\lg 0{,}95}$ folgt: $n \geq 90$ Auch mit systematischem Probieren lässt sich n aus der Bedingung $0{,}95^n \leq 0{,}01$ ermitteln. Auch mit einem Gegenbeispiel für n mit $90 \leq n < 100$ ist die Aussage des Qualitätsprüfers widerlegt.	4
f)	I	Erwartungswert $n = 50$ und $p = 0{,}05$. Da X binomialverteilt ist, gilt: $E(X) = n \cdot p = 2{,}5$ Pro Schachtel sind also im Durchschnitt 2,5 Kugelschreiber defekt.	2,5

g)	II	Bestimmt werden soll $P(Z \le 2)$: Entweder berechnet man die Einzelwahrscheinlichkeiten mit der Formel $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ und erhält $P(X \le 2)=0{,}95^{50}+\binom{50}{1}\cdot 0{,}05^1\cdot 0{,}95^{49}+\binom{50}{2}\cdot 0{,}05^2\cdot 0{,}95^{48}\approx 0{,}5405\approx 54{,}1\%$ oder man bedient sich der Formelsammlung, die eine Tafel für $n = 50$ und $p =$ 0,05 enthält, und liest den Wert 0,5405 ab.	3
h)	II	Ereignis G: Sendung enthält genau 50 defekte Kugelschreiber $n = 1000, p = 0{,}05$. Es gilt: $P(G)=P(X=50)=\binom{1000}{50}0{,}05^{50}\cdot 0{,}95^{950}\approx 0{,}058$. Mit den meisten Taschenrechnern kann man diesen Wert mit dieser Formel auf diesem Wege nicht berechnen, aber man kann die Binomial- durch die Normal-Verteilung approximieren, da $\sigma > 3$. $P(X=k)\approx \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ und $\sigma=\sqrt{47{,}5}$, $\mu=50$. $P(G)\approx \frac{1}{\sqrt{47{,}5\cdot 2\pi}}\cdot e^0 \approx 0{,}058$.	3
i)	II-III	Der Erwartungswert der Anzahl defekter Kugelschreiber in 20 Schachteln mit je 50 Kugelschreibern beträgt zwar $n\cdot p=1000\cdot 0{,}05=50$, aber es ist dennoch sehr unwahrscheinlich, diesen **genau** zu treffen. (Andererseits ist es sehr wahrscheinlich, in die „Nähe“ zu kommen, z.B. in eine 2σ-Umgebung.)	2
j)	II-III	Die Zufallsvariable Y beschreibe die Kosten, die pro Kugelschreiber auftreten. Dann gilt: $E(Y)=0{,}30€\cdot 0{,}95+1{,}30€\cdot 0{,}05=0{,}35€$ Bei einem Preis von 0,40 €ist also ein Gewinn von 0,05 €pro Kugelschreiber zu erwarten. Dieser beträgt dann $\frac{1}{7}\approx 14{,}3\%$ der zu erwartenden Kosten. Der Herstellerbetrieb kann also sein Planungsziel erreichen.	4
k)	II	X ist binomialverteilt, weil es nur die beiden möglichen Ausgänge „defekt“ und „nicht defekt“ gibt, und die Wahrscheinlichkeit für einen defekten Kugelschreiber auf jeder Stufe des Zufallsexperimentes gleich bleibt. Außerdem gilt $\mu = 30$ $\sigma=\sqrt{600\cdot 0{,}05\cdot(1-0{,}05)}=\sqrt{28{,}5}\approx 5{,}34$ Da also $\sigma > 3$ ist, die die Approximation durch die Normalverteilung zulässig (La Place-Bedingung)	4 (2+2)
l)	II	$P(X>20)=P(X\ge 21)$ $=1-P(X\le 20)$ $=1-\Phi\left(\frac{20-30+0{,}5}{\sqrt{28{,}5}}\right)$ $=1-\Phi(-1{,}78)$ $=96{,}25\%$	3
m)	II-III	Schenk: $H_0: p = 0{,}98$ $H_1: p \le 0{,}98$ $A=[95{,}100]\quad \bar{A}=[0;94]$	4 (2+2)

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Er würde H_0 beibehalten, wenn zwischen 95 und 100 Kulis einwandfrei sind.

Tegeler:
$$H_0 : p = 0,98$$
$$H_1 : p \geq 0,98$$
Er würde das Angebot des Konkurrenten (wenn überhaupt) nur akzeptieren, wenn 100 Kulis einwandfrei sind.

$$A = [0; 100] \quad \bar{A} = \{ \quad \}$$</td><td></td></tr>
<tr><td>n)</td><td>II-III</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>H_0 angenommen</th><th>H_0 ablehnen</th></tr>
<tr><td>H_0 wahr</td><td>Sicherheit 1. Art</td><td>Fehler 1. Art
α-Fehler</td></tr>
<tr><td>H_0 falsch</td><td>Fehler 2. Art
β-Fehler</td><td>Sicherheit 2. Art</td></tr>
</table>

Fehler 1. Art
Schenk: $P(X \leq 94) = 1,55\%$
Tegeler: $P(X \geq 100) = 0$ (Beachte: $P(X \geq 99) = 1 - 0.8674 = 0,1326$)

Fehler 2. Art:
Schenk: $P_{0,95}(X \geq 95) = 1 - P(X \leq 94) = 1 - 0,3840 = 0,6160$
Tegeler: $P_{0,95}(X \leq 100) = 1$

Interpretation:
Selbst wenn Herr Tegeler bei 100 einwandfreien Kulis die Lieferung annimmt, beträgt der Fehler 1. Art noch 13,26%. Er ist also größer als das Signifikanzniveau. Um signifikante Ergebnisse zu erhalten, müsste man n erhöhen. Der Fehler 2. Art ist bei beiden sehr groß, da die beiden Wahrscheinlichkeiten sich nur minimal unterscheiden.</td><td>5
(2+2+1)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>50</td></tr>
</table>