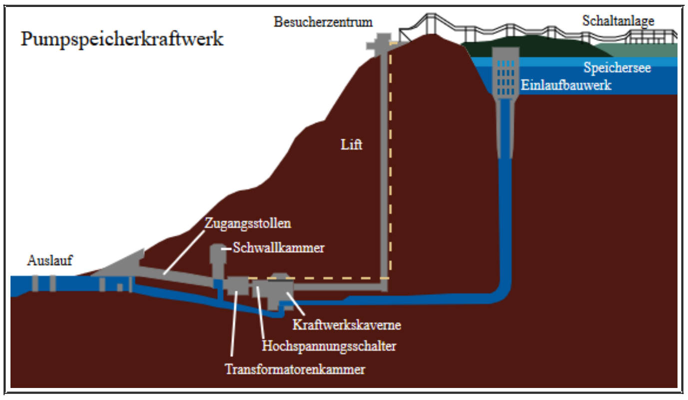
1. Kursarbeit Mathematik M1

Aufgabe II: Analysis

Hilfsmittel: Tafelwerk

Taschenrechner

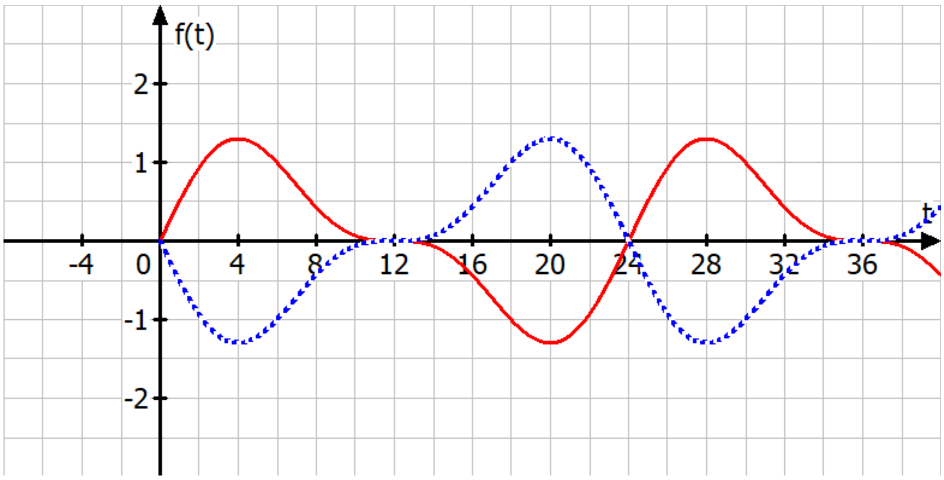
Aufgabe 1:



Ein Pumpspeicherkraftwerk dient als Speicher für elektrische Energie. In Zeiten des Stromüberschusses wird Wasser mit elektrischen Pumpen in einen hoch gelegenen Speichersee gepumpt. Wird zu einem späteren Zeitpunkt viel Strom benötigt, so kann das Wasser wieder abgelassen werden. Dabei läuft es über Turbinen, die elektrische Energie erzeugen. Elektrische Energie wird also in Form von Lageenergie des Wassers gespeichert und kann auch wieder abgerufen werden. (Der Wirkungsgrad beträgt ca. 75-80%, es gehen also 20-25% der Energie bei der Umwandlung in Form von Wärme verloren).

Der folgende Graph zeigt modellhaft den Wasserstand des Speichersees in Metern als Abweichung von einem durchschnittlichen Wasserstand in Abhängigkeit von der Zeit in Stunden.

1.1 Zeichnen Sie in das Koordinatensystem einen zweiten Graphen ein, der plausibel unter Berücksichtigung des Wasserstandsgraphen den Strombedarf im Tagesverlauf wiedergibt.



1.2 Erklären Sie in einem kurzem Text den Verlauf beider Graphen. Gehen Sie dabei auch auf die Uhrzeiten ein.

Blauer Graph Stromverbrauch: Nachts ist der Stromverbrauch niedrig. Gegen morgen steigt der Stromverbrauch an, wenn sich viele Menschen auf den Weg zur Arbeit oder Schule machen. Während der normalen Arbeitszeit bleibt der Stromverbrauch relativ konstant. Gegen Abend, wenn die meisten Menschen zu Hause sind, ist der Stromverbrauch am höchsten, bevor er immer weiter sinkt, je mehr Menschen schlafen gehen.

Roter Graph Wasserstand: Die beiden Graphen sind achsensymmetrisch zur x-Achse, weil bei hohem Stromverbrauch Wasser aus dem See entnommen wird. Bei niedrigem Stromverbrauch kann überschüssiger Strom im See als potentielle Energie gespeichert werden und der Wasserstand steigt.

1.3 Erklären Sie in einem kurzem Text die Bedeutung der Ableitungsfunktion des Wasserstandsgraphen im Kontext der Aufgabenstellung.

Die Ableitungsfunktion gibt die Änderungsrate des Wasserstands wieder und lässt sich im Graph als Steigung ablesen. Indirekt gibt die Ableitungsfunktion also die Zu- und Abflussgeschwindigkeit des Wassers wieder.

Im folgenden wird der Wasserstand des Speichersees mit der Funktion

$f(t)=0.5\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t\right)$ modelliert.

Außerdem gehen wir davon aus, dass der Speichersee die Form eines Zylinders mit der Grundfläche A_0 hat. Der mittlere Wasserstand ($y = 0$ im Graphen) betrage h_0 Meter.

1.4 Stellen Sie die Funktion *f* durch eine Funktion *g* ohne Sinusfunktion dar.

$$g(t)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t-\frac{\pi}{2}\right)$$

1.5. Berechnen Sie den Wasserstand in Metern

1.5.1 zu Beginn der Messung,

$$f(0)=\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 0\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot 0\right)=\boldsymbol{h_0+0\,m}$$

1.5.2 nach 6 Stunden,

$$f(0)=\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot 6\right)=\sin(\pi)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0+1=\boldsymbol{h_0+1\,m}$$

1.5.3 nach 7 Stunden.

$$f(0)=\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 7\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot 7\right)=\boldsymbol{h_0+0{,}72\,m}$$

1.6 Berechnen Sie die Zeitpunkte des höchsten und niedrigsten Wasserstandes in den ersten 24 Stunden.

Tipp für die Rechnung: Die Summe zweier Kosinusfunktionen der Form $\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot x\right)$ ist genau dann 0, wenn für die Differenz der beiden Winkel $\phi_2=\frac{\pi}{6}x$ und $\phi_1=\frac{\pi}{12}x$ gilt:

$$\Delta\phi=\frac{(2n-1)}{3}\pi,\ n\in\mathbb{N}$$

Gesucht sind die Extremstellen:

$$f'(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)+\frac{\pi}{12}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t\right)=\frac{\pi}{12}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t\right)\right)$$

Notwendige Bedingung: Nullstellen der Ableitungsfunktion sind die Kandidaten für die Extremstellen.

$$0=\frac{\pi}{12}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t_n\right)+\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t_n\right)\right) \quad | :\frac{\pi}{12}$$
$$\Leftrightarrow 0=\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t_n\right)+\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t_n\right)$$

$$\Delta\phi=\frac{(2n-1)}{3}\pi$$

$$\phi_1=\frac{\pi}{6}\cdot t;\phi_2=\frac{\pi}{12}\cdot t \;\Rightarrow\; \Delta\phi=\frac{\pi}{6}\cdot t-\frac{\pi}{12}\cdot t=\frac{\pi}{12}t(2-1)=\frac{\pi}{12}t$$

1. Nullstelle: n = 1

$$\frac{(2\cdot1-1)}{3}\pi=\frac{\pi}{12}t_1 \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{12}t_1 \;\Leftrightarrow\; t_1=4$$

2. Nullstelle: n = 2

$$\frac{(2\cdot2-1)}{3}\pi=\frac{\pi}{12}t_2 \;\Leftrightarrow\; \pi=\frac{\pi}{12}t_2 \;\Leftrightarrow\; t_2=12$$

3. Nullstelle: n = 3

$$\frac{(2\cdot3-1)}{3}\pi=\frac{\pi}{12}t_1 \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{3}\pi=\frac{\pi}{12}t_3 \;\Leftrightarrow\; t_3=20$$

Die vierte Nullstelle liegt außerhalb des 24h-Bereichs.

Hinreichende Bedingung: $f''(t_n)\neq0$

$$f''(t)=\frac{\pi}{12}\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)+\left(-\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{12}\cdot t\right)\right)=-\frac{\pi^2}{144}\cdot\left(2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t\right)\right)$$

$f''(4)=-0{,}1781 \Rightarrow$ Hochpunkt $f(4)=1{,}30$, also $H(4|1{,}30)$
$f''(12)=0 \Rightarrow$ Wendestelle
$f''(20)=0{,}1781 \Rightarrow$ Tiefpunkte $f(20)=-1{,}30$, also $T(4|-1{,}30)$

<u>**1.7**</u> Berechnen Sie das Volumen des transportierten Wassers innerhalb der ersten 24 Stunden, wenn man davon ausgeht, dass der Speichersee eine Grundfläche von $A_0=5000\,m^2$ hat.

Es genügt, den Gesamthub zu berechnen.

- Von Stunde 0 bis Stunde 4 ändert sich der Wasserstand um
  $\Delta s_1=|f(4)-f(0)|=|1{,}30\,m-0\,m|=1{,}30\,m$

- Von Stunde 4 bis Stunde 20 ändert sich der Wasserstand um
  $\Delta s_2=|f(20)-f(4)|=|-1{,}30\,m-1{,}30\,m|=2{,}60\,m$

- Von Stunde 20 bis Stunde 24 ändert sich der Wasserstand um
  $\Delta s_3=|f(24)-f(20)|=|0-(-1{,}30\,m)|=1{,}30\,m$

$\Delta s=\Delta s_1+\Delta s_2+\Delta s_3=1{,}30\,m+2{,}60\,m+1{,}30\,m=5{,}20\,m$

Das Volumen des transportieren Wasser beträgt also
$\Delta V=A_0\cdot 5{,}20\,m=5000\,m^2\cdot 5{,}2\,m=26000\,m^3=26.000.000\,l$

<u>**Aufgabe 2:**</u> Funktionenschar $f_t(x)=\frac{x\cdot t}{e^x},\quad x\in\mathbb{R}_0^+, t\in\mathbb{R}$

<u>**2.1**</u> Bestätigen Sie, dass alle Funktionen der Schar einen gemeinsamen Punkt haben und geben Sie diesen Punkt an.

$f_t(0)=\frac{0\cdot t}{e^0}=\frac{0}{1}=0$ Der gemeinsame Punkt ist $(0|0)$.

<u>**2.2**</u> Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereiches.

e^x wird niemals *0*, also gibt es keine Polstellen und es gilt $D=x\in\mathbb{R}_0^+$

$\lim\limits_{x\to 0} f_t(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot t}{e^x}=\frac{0\cdot t}{e^0}=\frac{0}{1}=0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f_t(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot t}{e^x}=0,$ weil die e-Funktion dominiert.

<u>**2.3**</u> Zeigen Sie, dass fast alle Funktionen der Funktionenschar einen Hoch- oder Tiefpunkt haben. Berechnen Sie dazu die Hoch- und Tiefpunkte in Abhängigkeit von *x* und *t*.

Bildung der Ableitungsfunktionenscharen:

Quotientenregel mit $u(x)=x\cdot t \;\Rightarrow\; u'(x)=t$ und $v(x)=e^x \;\Rightarrow\; v'(x)=e^x$:

$f_t'(x)=\frac{t\,e^x-x\,t\,e^x}{(e^x)^2}=\frac{t-x\,t}{e^x}$

Notwendige Bedingung:

$0=\frac{t-x_E t}{e^{x_E}} \quad | \cdot e^{x_E} \quad (e^x \neq 0 \, \forall x)$

$\Leftrightarrow \; 0=t-x_E t \quad | :t \quad \forall t \neq 0$ (Für $t=0$ ist $f_0(x)=\frac{x\cdot 0}{e^x}=0$ eine Gerade ohne Extrempunkt).

$\Leftrightarrow \; 0=1-x_E$

$\Leftrightarrow \; x_E=1$

Hinreichende Bedingung: $f''(t_n) \neq 0$

Quotientenregel mit $u(x)=t-x\cdot t \Rightarrow u'(x)=-t$ und $v(x)=e^x \Rightarrow v'(x)=e^x$:

$$f_t''(x)=\frac{-te^x-(t-xt)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-t-(t-xt)}{e^x}=\frac{xt-2t}{e^x}$$

$$f_t''(1)=\frac{1\cdot t-2t}{e^1}=\frac{-t}{e}\neq 0$$

Für $t>0$ ist $f_t''(1)<0$ und damit ist x_E die x-Koordinate eines Hochpunktes.
Für $t<0$ ist $f_t''(1)>0$ und damit ist x_E die x-Koordinate eines Tiefpunktes.

y-Koordinaten der Extrempunkte: $f_t(1)=\frac{1\cdot t}{e^1}=\frac{t}{e}$

Also $\boldsymbol{E\left(1\middle|\frac{t}{e}\right)}$ $\forall t \neq 0$. Weil der Definitionsbereich auf $x \in \mathbb{R}_0^+$ beschränkt ist, und f für alle t<>0 streng monoton ist, gibt es bei $x=0$ außerdem ein Randextremum.

<u>2.4</u> Zeigen Sie, dass die Funktionenschar keine obere und keine untere Schranke für die Funktionswerte hat.

Weil $\lim_{x\to 0} f_t(x)=0$ *und* $\lim_{x\to\infty} f_t(x)=0$ *ist die y-Koordinate des Extrempunktes gleichzeitig obere (für t>0) oder untere Schranke (für t<0) der einzelnen Funktion* f_t.
Weil t aber unbegrenzt ist und somit auch $\frac{t}{e}$, *hat die Gesamtheit aller Funktionen der Funktionenschar keine obere oder untere Schranke.*

<u>2.5</u> Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt zwischen den Funktionen der Funktionenschar und der *x*-Achse endlich ist und berechnen Sie diesen Flächeninhalt in Abhängigkeit von *t*.

$$\int f_t(x)dx=\int \frac{x\cdot t}{e^x}dx=t\cdot\int x\cdot e^{-x}dx$$

Partielle Integration $\int u(x)v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)dx$ hier mit
$u(x)=x \Rightarrow u'(x)=1$ und $v'(x)=e^{-x} \Rightarrow v(x)=-e^{-x}$

$$\int x\cdot e^{-x}dx=x\cdot(-e^{-x})-\int -e^{-x}dx=-x e^{-x}-e^{-x}=e^{-x}(-x-1)=-\frac{x+1}{e^{x}}$$

$$\boldsymbol{A}=\left|\int_0^\infty f_t(x)\,dx\right|=\left|\int_0^\infty \frac{x\cdot t}{e^x}\,dx\right|=\left|t\cdot\left(\lim_{b\to\infty}F(b)-F(0)\right)\right|=\left|t\cdot\left(\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b+1}{e^b}\right)-\left(-\frac{0+1}{e^0}\right)\right)\right|=|t\cdot(0+1)|=|\boldsymbol{t}|$$

<u>Aufgabe 3:</u> Gegeben ist die abschnittweise definierte Funktion

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\, für\ x\leq 4\\ h(x)\, für\ x>4\end{cases}\quad \text{mit}\quad g(x)=\frac{0{,}5x^2-2x}{x+1}\quad\text{und}\quad h(x)=e^{a(x-b)}+c$$

Bestimmen Sie die Parameter *a*, *b* und *c* so, dass *f* stetig differenzierbar ist. Begründen Sie Ihre Wahl mit einer Rechnung.

Lösung:

Sowohl *g* und *h* sind in Ihrem Definitionsbereich stetig differenzierbar. (Muss nicht gezeigt werden).

Entscheidend ist also nur die Schnittstelle $x_0=4$.

Stetigkeit: Es muss gelten: $g(4)=h(4)$ (Eigentlich $g(4)=\lim\limits_{x\to 4} h(x)$)

$$g(x)=\frac{0{,}5\cdot 4^2-2\cdot 4}{4+1}=\frac{8-8}{5}=0$$

Wo liefert die e-Funktion eine ganze Zahl als Funktionswert? $e^0=1$ Also ist $(0|1)$ ein Punkt der e-Funktion. Damit $(4|0)$ ein Punkt der e-Funktion ist, muss man sie um 4 nach rechts und 1 nach unten verschieben. Daraus folgt direkt: $b=4$ und $c=-1$

Differenzierbarkeit: Es muss gelten $g‘(4)=h‘(4)$ (Eigentlich $g'(4)=\lim\limits_{x\to 4} h'(x)$)

$$g‘(x)=\frac{\frac{1}{2}x^2+x-2}{(x+1)^2}$$ mit Hilfe der Quotientenregel. $g‘(4)=\frac{2}{5}$

$h‘(x)=a\cdot e^{a(x-4)}$; $h'(4)=a\cdot e^{a(4-4)}=a$ Aus der Forderung $g'(4)=h'(4)$ folgt: $a=\frac{2}{5}$

Also ist $\boldsymbol{a=0{,}4}$, $\boldsymbol{b=4}$, $\boldsymbol{c=-1}$ eine der unendlich vielen Lösungen.

Graph: (nicht gefordert)