

Aufgabe 1: Bestimme die Ableitungsfunktionen. Vereinfache den Funktionsterm der Ableitungsfunktion so weit wie möglich.

$$\mathbf{1.1} \quad f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} = \sin^{-2}(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \cdot (-2) \cdot \sin^{-3}(x) = -\frac{2 \cos(x)}{\sin^3(x)}$$

$$\mathbf{1.2} \quad f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}} = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{x} - (x^2-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x^{1.5} - \frac{x^2-1}{2x^{0.5}}}{x}$$

Ergebnis weiter vereinfachen:

$$f'(x) = \frac{\frac{4x^{1.5} \cdot x^{0.5}}{2x^{0.5}} - \frac{x^2-1}{2x^{0.5}}}{x} = \frac{\frac{4x^2 - x^2 - 1}{2x^{0.5}}}{x} = \frac{3x^2 - 1}{2x^{1.5}}$$

$$\mathbf{1.3} \quad f(x) = \frac{x \sin(x)}{\tan(x)} = \frac{x \sin(x)}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = x \cdot \cos(x) \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \cos(x) - x \sin(x) = \cos(x) - x \sin(x)$$

$$\mathbf{1.4} \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{e^y} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x)}{e^y}$$

$$\mathbf{1.5} \quad f(t) = \frac{\sin(x^2 + 3x + \cos(x))}{\sqrt{\tan(x^2)}} \Rightarrow f'(t) = 0$$

$$\mathbf{1.6} \quad f(x) = \frac{\cos(x) \cdot [\cos(x) + \tan(x) \sin(x)]}{e^{\ln(x)} \cdot x^{-1}} = \frac{\cos(x) \cdot \left[\cos(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \sin(x) \right]}{x \cdot x^{-1}} \\ = (\cos^2(x) + \sin^2(x)) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$$

Aufgabe 2: Bestimme die Stellen, an denen die Funktion f die Steigung m hat.

$$\mathbf{2.1} \quad f(x) = \sin(x) ; m=1 \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

Stelle mit der Steigung 1 der Funktion ist gleich der Stelle, an der die Ableitungsfunktion den Wert 1 hat. Also ist $(x_1|1)$ ein Punkt auf dem Graphen der Ableitungsfunktion. Einsetzen:

$$1 = \cos(x_1) \quad | \quad \arccos \Rightarrow \arccos(1) = x_1 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

Das ist nicht die vollständige Lösung, da der Arkuskosinus nur für den Winkelbereich von $[0; \pi]$ die Umkehrfunktion des Kosinus ist. Es gibt aber weitere (unendlich) viele Winkel mit dem Kosinuswert 1. Aus dem Wissen über den Graphen der Kosinusfunktion lautet die Lösung also:

$$x_n = n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{2.2} \quad f(x) = \frac{x+1}{x+2} ; m=2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x+2) - (x+1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$2 = \frac{1}{(x_1+2)^2} \quad | \quad \cdot \frac{(x_1+2)^2}{2} \Leftrightarrow (x_1+2)^2 = \frac{1}{2} \quad | \quad \sqrt{\quad} \Leftrightarrow (x_{1/2}+2) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad | \quad -2 \Leftrightarrow x_{1/2} = -2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-4 \pm \sqrt{2}}{2}$$

2.3 $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $m = \frac{1}{2}$ $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} x_1^{\frac{2}{3}} \quad | \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2} = x_1^{\frac{2}{3}} \quad | \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = x_1 \approx 0,54433$$

Aufgabe 3: Bestimme die Gleichung der Tangenten der Funktion f an der Stelle x_0 .

3.1 $f(x) = \frac{2x^2 - x}{\frac{1}{10}x^2 + 2}$; $x_0 = 2$ $f(x) = \frac{2x^2 - x}{\frac{1}{10}(x^2 + 20)}$

$$\Rightarrow f'(x) = 10 \cdot \frac{(4x-1)(x^2+20) - (2x^2-x) \cdot 2x}{(x^2+20)^2} = 10 \cdot \frac{4x^3 - x^2 + 80x - 20 - 4x^3 + 2x^2}{(x^2+20)^2} = 10 \cdot \frac{x^2 + 80x - 20}{(x^2+20)^2}$$

$$f(2) = 10 \cdot \frac{2 \cdot 2^2 - 2}{(2^2 + 20)} = 10 \cdot \frac{8 - 2}{24} = \frac{60}{24} = 2,5 \quad f'(2) = 10 \cdot \frac{2^2 + 80 \cdot 2 - 20}{(2^2 + 20)^2} = 10 \cdot \frac{4 + 160 - 20}{24^2} = \frac{1440}{576} = 2,5$$

Tangente: $g(x) = mx + n$ $m = f'(2) = 2,5$

Der Punkt $(2 | f(2))$ liegt auf dem Graphen von f und auf dem Graphen von g. Einsetzen in g:

$$f(2) = m \cdot 2 + n \Leftrightarrow 2,5 = 5 + n \quad | -5 \Leftrightarrow n = -2,5 \quad \text{Also } g(x) = 2,5x - 2,5$$

Aufgabe 4: Bestimme eine Stelle x_0 der Funktion f, an der die Normale von f durch den Punkt P geht.

4.1 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$; $P(2 | -5)$ $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{6} x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6 x^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{6 \sqrt[6]{x^5}}$

Normale durch x_0 : $g(x_0) = mx_0 + n$ mit $m = \frac{1}{f'(x_0)}$. Laut Aufgabenstellung liegt der Punkt

$(2 | -5)$ auf der Normalen. Einsetzen:

$$-5 = \frac{1}{f'(x_0)} \cdot 2 + n \Leftrightarrow -5 = \frac{2}{\frac{1}{6 x_0^{\frac{5}{6}}}} + n \Leftrightarrow -5 = 2 \cdot 6 x_0^{\frac{5}{6}} + n \Leftrightarrow n = -5 + 12 x_0^{\frac{5}{6}}$$

Also $g(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)} x_0 - 5 + 12 x_0^{\frac{5}{6}} = 6 x_0^{\frac{5}{6}} x_0 - 5 + 12 x_0^{\frac{5}{6}} = 6 x_0^{\frac{11}{6}} + 12 x_0^{\frac{5}{6}} - 5$

Der Punkt $(x_0 | y_0)$ liegt sowohl auf f als auch auf g. Einsetzen in f und g:

In f: $y_0 = x_0^{\frac{1}{6}}$, in g: $y_0 = 6 x_0^{\frac{11}{6}} + 12 x_0^{\frac{5}{6}} - 5$ Gleichsetzen:

$$x_0^{\frac{1}{6}} = 6 x_0^{\frac{11}{6}} + 12 x_0^{\frac{5}{6}} - 5 \Leftrightarrow 0 = 6 x_0^{\frac{11}{6}} + 12 x_0^{\frac{5}{6}} - x_0^{\frac{1}{6}} - 5$$

$$x_0 = 1 \quad \text{durch Probieren, denn } 0 = 6 \cdot 1^{\frac{11}{6}} + 12 \cdot 1^{\frac{5}{6}} - 1^{\frac{1}{6}} - 5 \Leftrightarrow 0 = 6 + 12 - 1 - 5 \Leftrightarrow 0 = 0$$