

**Aufgabe 1:** Überprüfe, wie sich die jeweiligen Geraden bzw. Ebenen im dreidimensionalen Raum begegnen. Falls sie sich schneiden, berechne den jeweiligen Schnittpunkt bzw. die jeweilige Schnittgerade.

$$1.1 \quad g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Setze die beiden Geradengleichungen gleich:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad | - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow +s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} I. \quad 1s - 2t = 1 \\ II. \quad -1s + 2t = 0 \quad | \cdot 5 \\ III. \quad 5s - 10t = -7 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} I. \quad 1s - 2t = 1 \\ II. \quad -5s + 10t = 0 \quad | II. + III. \Rightarrow IIIa. \quad 0 = -7 \\ III. \quad 5s - 10t = -7 \end{array}$$

Diese Gleichung ist immer unwahr, also hat das LGS keine Lösung, also gibt es keinen Schnittpunkt zwischen den Geraden. Die Geraden sind also parallel oder windschief zueinander.

Betrachte die beiden Richtungsvektoren: Wenn die beiden Geraden parallel zueinander sind, sind es auch die Richtungsvektoren. Zwei Richtungsvektoren sind parallel zueinander, wenn sie sich als Vielfache voneinander darstellen lassen. Das LGS

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ muss also lösbar sein.}$$

$I. \quad 2 = 2t$   
 $II. \quad -2 = -2t \Leftrightarrow t = 1$  für alle Gleichungen. Die beiden Richtungsvektoren parallel sind also  
 $III. \quad 10 = 10t$   
parallel zueinander.

**Die beiden Geraden liegen parallel zueinander.**

$$\underline{1.2} \quad E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad E_2: x_1 + 4x_3 = 2$$

Aus der Parametergleichung von Ebene 1:

$$I. \quad x_1 = 8 + 2r$$

$$II. \quad x_2 = 2 + r + s \quad \text{Setze die Koordinaten in die Koordinatengleichung von Ebene 2 ein:}$$

$$III. \quad x_3 = -10 + 2s$$

$$(8 + 2r) + 4(-10 + 2s) = 2 \Leftrightarrow 8 + 2r - 40 + 8s = 2 \Leftrightarrow 2r + 8s = 34 \Leftrightarrow 2r = 34 - 8s \Leftrightarrow r = 17 - 4s$$

Setze  $r = 17 - 4s$  in die Parametergleichung von Ebene 1 ein:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + (17 - 4s) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 34 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + (-4s) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 42 \\ 19 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 19 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 + 0 \\ -2 + 1 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 19 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Schnittgerade hat also die Geradengleichung  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 42 \\ 19 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$