

Aufgabe 1: Gegeben sind die folgenden Vektoren und Skalare:

$$r=5; s=7; \vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{c}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{d}=\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{f}=\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Falls die folgenden Terme ungültig sind, schreibe als Lösung „ungültig“. Berechne ansonsten und vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich:

1.1 $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ **1.2** $\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=-1\cdot(-1)+0\cdot 2+4\cdot 0=1$

1.3 $(\vec{a}\cdot\vec{b})+(\vec{d}\cdot\vec{f})=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}=(2\cdot(-1)+3\cdot 0+4\cdot 4)+(2\cdot(-4)+8\cdot 2)=14+8=22$

1.4 $r\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=5\cdot\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right]=5\cdot\begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 60 \\ -60 \\ 15 \end{pmatrix}$

1.5 $s\cdot(\vec{a}\cdot|\vec{d}\times\vec{f}|)$ **ungültig** (Man kann das Kreuzprodukt nur bei dreidimensionalen Vektoren bilden.)

1.6 $r\cdot(|\vec{f}-\vec{d}|+|\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})|)$

$$r\cdot|\vec{f}-\vec{d}|=5\cdot\left|\begin{pmatrix} -4-2 \\ 2-8 \end{pmatrix}\right|=5\cdot\left|\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}\right|=5\cdot\sqrt{(-6)^2+(-6)^2}=5\cdot\sqrt{72}=5\cdot 6\cdot\sqrt{2}=30\sqrt{2}$$

$$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})|=\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right|=\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot[(-1)\cdot(-1)+0\cdot 2+4\cdot 0]\right|=\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot 1\right|=\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right|$$

$$=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}$$

$$r\cdot(|\vec{f}-\vec{d}|+|\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})|)=30\sqrt{2}+\sqrt{29}\approx 47,8116$$

1.7 Berechne den zu \vec{a} passenden Einheitsvektor

$$\vec{n}_a=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{29}}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{3}{\sqrt{29}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$$

1.8 Berechne den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{c}

$$\cos(\phi)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}}=\frac{2\cdot(-1)+3\cdot 2+4\cdot 0}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{145}}\approx 0,3322$$

$$\Rightarrow \phi=\arccos(0,3322)=70,60^\circ$$

1.9 Bestimme die fehlenden Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 15 \end{pmatrix}$, der senkrecht sowohl zu \vec{a} als auch zu \vec{b} steht.

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ steht senkrecht auf } \vec{a} \text{ und } \vec{b}. \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jedes Vielfache dieses Vektors steht auch senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} . Also $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 15 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$

Betrachte 3. Koordinate: $15 = 3t \Leftrightarrow t = 5$. Also $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 15 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ -60 \\ 15 \end{pmatrix}$

1.10 Die Vektoren \vec{a} und \vec{c} spannen ein Parallelogramm auf. Berechne den Flächeninhalt dieses Parallelogramms.

$$A = |\vec{a} \times \vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{64 + 16 + 49} = \sqrt{129} \approx 11,36$$

1.11 Die Vektoren \vec{b} und \vec{c} bilden zwei Seiten eines Dreiecks und der Verbindungsvektor von \vec{b} und \vec{c} bildet die dritte Dreiecksseite. Untersuche, ob das Dreieck gleichseitig, gleichschenkelig, rechtwinklig oder unregelmäßig ist und berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

Untersuche die Seitenlängen:

$$|\vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$|\vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{b} - \vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} -1 - (-1) \\ 0 - 2 \\ 4 - 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

Das Dreieck ist also nicht gleichseitig oder gleichschenkelig. Es ist auch nicht rechtwinklig, denn in einem rechtwinkligen Dreieck wäre die längste Seite die Hypotenuse und der Satz des Pythagoras müsste gelten. Aber: $20 \neq 17 + 5$

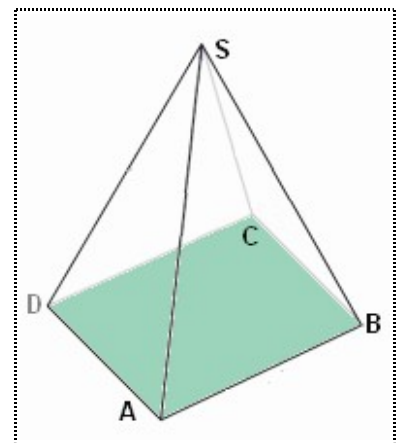
Die Dreiecksfläche ist die halbe Fläche des von \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Parallelogramms.

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{64 + 16 + 4} = \frac{\sqrt{84}}{2} = \sqrt{21} \approx 4,58$$

Aufgabe 2: Eine Pyramide hat die Eckpunkte $A(8|2|2), B(8|12|2), C(-4|14|2)$ und die Spitze $S(2|8|7)$.

Die Grundfläche der Pyramide ist ein Parallelogramm.

2.1 Begründe, warum der Punkt D die Koordinaten $D(-4|4|2)$ haben muss.



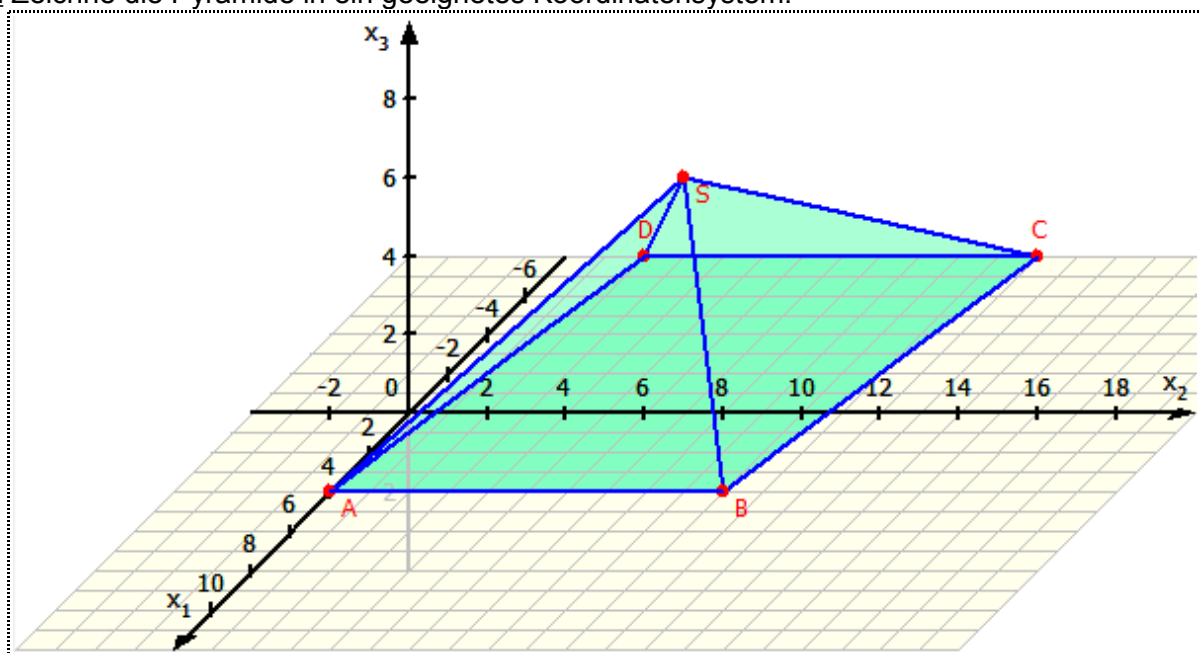
Wenn die Grundfläche ein Parallelogramm ist, muss gelten:

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d} \quad \text{und} \quad \vec{d} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ 12-2 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix} -4-d_1 \\ 14-d_2 \\ 2-d_3 \end{pmatrix} \quad \text{Also}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-d_1 \\ 14-d_2 \\ 2-d_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = -4-d_1 \Leftrightarrow d_1 = -4 \\ 10 = 14-d_2 \Leftrightarrow d_2 = 4 \\ 0 = 2-d_3 \Leftrightarrow d_3 = 2 \end{matrix} \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.2 Zeichne die Pyramide in ein geeignetes Koordinatensystem.



2.3 Zeige rechnerisch, dass die Grundfläche ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

Parallelogramm: Die gegenüberliegenden Seiten müssen gleich lang und parallel sein. Dies ist der Fall, wenn die Verbindungsvektoren zwischen den Ecken gleich lang und parallel sind (bzw. gleich sind). Also muss gelten: $\vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d}$ und $\vec{d} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$

$$\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ 12-2 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix} -4-(-4) \\ 14-4 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{o.k.}$$

$$\vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -4-8 \\ 4-2 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -4-8 \\ 14-12 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{o.k.}$$

Rechteck, wenn $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 12 + 10 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 20$$

Also kein Rechteck.

2.4 Das Volumen der Pyramide beträgt 200 Volumeneinheiten. Berechne die Höhe der Pyramide.

Benutze $V = \frac{1}{3} G h$. Die Grundfläche G ist ein Parallelogramm, das durch die Vektoren \vec{AB}

und \vec{AD} aufgespannt wird. Es gilt $G = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \end{pmatrix} \right| = 120$

$$V = \frac{1}{3} G h \Leftrightarrow h = \frac{3V}{G} = \frac{3 \cdot 200}{120} = 5 \quad \text{A: Die Höhe der Pyramide beträgt 5 Längeneinheiten.}$$

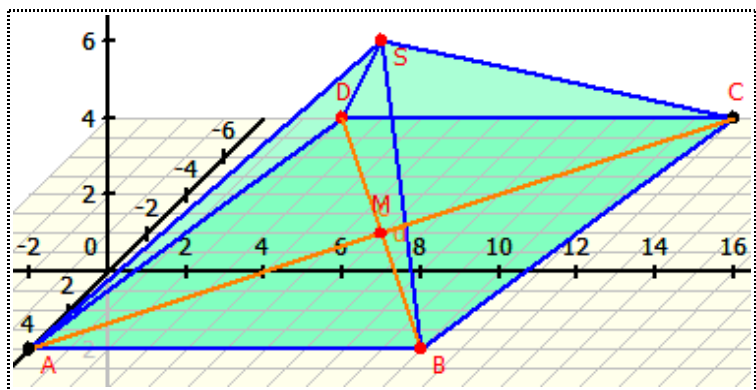
2.5 Zeige rechnerisch, dass sich die Spitze der Pyramide genau senkrecht über dem Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche befindet.

Hier gibt es mehrere Lösungswege, von denen zwei vorgestellt werden.

1.) Der Schnittpunkt der Diagonalen teilt die Diagonalen in der Mitte, weil die Grundfläche ein Parallelogramm ist. Wenn M der Schnittpunkt mit dem Ortsvektor \vec{m} ist, muss also gelten:

$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{AC} \quad (\text{oder } \vec{m} = \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{BD}).$$

Der Verbindungsvektor von M nach S muss senkrecht auf den Diagonalen stehen, wenn die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt ist. Also muss man nur noch den Wahrheitsgehalt der Gleichung $\vec{AC} \cdot \vec{MS} = 0$ (oder $\vec{BD} \cdot \vec{MS} = 0$) prüfen.



$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4-8 \\ 14-2 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{MS} = \vec{m} - \vec{s} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 8-8 \\ 2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{MS} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = -12 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 0 \cdot (-5) = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

2.) Wenn die Spitze genau senkrecht über der Mitte der Grundfläche steht, müssen gegenüber liegende Seitenkanten jeweils gleich lang sein.

$$\vec{SA} = \vec{a} - \vec{s} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 2-8 \\ 2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{SB} = \vec{b} - \vec{s} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 12-8 \\ 2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{SC} = \vec{c} - \vec{s} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ 14-8 \\ 2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{SD} = \vec{d} - \vec{s} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ 4-8 \\ 2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Man sieht sofort: $|\vec{SA}| = |\vec{SC}|$ und $|\vec{SB}| = |\vec{SD}|$ q.e.d.