Mathematik GK m3, 2. KA – gebr. rat. Funktionen / Steigungen – Lösung 20.04.2015

Aufgabe 1: Gebrochen rationale Funktion

Gegeben ist die folgende gebrochen rationale Funktionen $f(x)=\frac{0.5x^4+2x^3-16x^2}{x^3-6x^2+12x-8}$

1.1 Berechne die Nullstellen der Funktion. (Kontrolllösung: $x_1=0\,;x_2=-8\,;x_3=4)$ *Hinweis: Die Aufgabe ist lösbar, ohne eine Nullstelle für den Zähler zu raten (zumal die Lösungen angegeben sind). Ein Lösungsweg, der dieses Probieren als Lösungsweg benutzt ist zulässig, führt aber zu Punktabzug!*

Nullstellen der Funktion: Nullstellen des Zählers, die nicht gleichzeitig Nullstellen des Nenners sind.

NST des Zählers:

$0=0.5x_n^4+2x_n^3-16x_n^2 \Leftrightarrow 0=x_n^2\cdot(0.5x_n^2+2x_n-16)$ Damit ist $x_1=0$ ein doppelte NST.

Betrachte Klammer: $0=0.5x_n^2+2x_n-16 \quad |\cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0=x_n^2+4x_n-32$ p-q-Formel:
$x_{2/3}=-2\pm\sqrt{2^2+32}=-2\pm\sqrt{36}=-2\pm 6 \Rightarrow x_2=-2-6=-8 \;;\; x_3=-2+6=4$

NST des Nenners: $x_4=2$ muss eine Nullstelle sein (siehe folgende Aufgabe).

Polynomdivision:	Weitere Nullstellen:
$(x^3-6x^2+12x-8):(x-2)=x^2-4x+4$ $-(x^3-2x^2)$ $-4x^2+12x-8$ $-(-4x^2+8x)$ $4x-8$ $-(4x-8)$ 0	$0=x_n^2-4x_n+4$ Mit 2. binomischer Formel: $\Leftrightarrow 0=(x_n-2)^2$ $x_4=2$ ist also eine dreifache NST des Nenners.

Es gibt keine Übereinstimmung zwischen den NST des Zählers und denen des Nenners.

Damit sind $x_1=0\,;x_2=-8\,;x_3=4$ die Nullstellen der Funktion.

1.2 Zeige mit Hilfe einer Rechnung, dass $x_4=2$ die einzige Polstelle der Funktion ist. *Wenn die Rechnung dazu bereits in Aufgabe 1.1 gemacht wurde, genügt ein Hinweis.*

siehe Rechnung Aufgabe 1.1

1.3 Erkläre: Was ist eine hebbare Definitionslücke? Wie sieht ein Graph aus, der an der Stelle x_0 eine Polstelle hat? Wie sieht dazu im Vergleich ein Graph aus, der an der Stelle x_0 eine hebbare Definitionslücke hat?

Eine hebbare Definitionslücke tritt auf, wenn eine (einfache, doppelte, dreifache, usw.) Nullstelle des Nenners gleichzeitig eine (einfache, doppelte, dreifache, usw.) Nullstelle des Zählers ist. An einer Polstelle nähern sich die Funktionswerte einer senkrechten Asymptote, d.h. sie laufen gegen $\pm\infty$. Der Graph verläuft an dieser Stelle genauso wie der Graph der Funktion, bei welcher der betreffende Nullstellenterm gekürzt wurde, abgesehen davon, dass er genau an dieser Stelle ein „Loch“ bzw. eine Lücke hat.

Mathematik GK m3, 2. KA – gebr. rat. Funktionen / Steigungen – Lösung 20.04.2015

1.4 Bestimme mit Hilfe einer Rechnung das Grenzwertverhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(0{,}5x^4+2x^3-16x^2 \qquad):(x^3-6x^2+12x-8)=0{,}5x+5+\dfrac{8x^2-56x+40}{x^3-6x^2+12x-8} \\
-(0{,}5x^4-3x^3+6x^2-4x) \\
\hline
\qquad 5x^3-22x^2+4x \\
\quad -(5x^3-30x^2+60x-40) \\
\hline
\qquad\qquad 8x^2-56x+40
\end{array}
$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0.5x^4+2x^3-16x^2}{x^3-6x^2+12x-8}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(0{,}5x+5+\frac{8x^2-56x+40}{x^3-6x^2+12x-8}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}(0{,}5x+5)+0=\pm\infty$$

1.5 Berechne ggf. vorhandene waagerechte oder schiefe Asymptoten.

Schiefe Asymptote: $\boldsymbol{g(x)=0{,}5x+5}$ *Rechnung siehe Aufgabe 1.4*

1.6 Erkläre kurz, warum man auch ohne Rechnung am Funktionsterm sehen kann, dass es eine schiefe Asymptote sein muss.

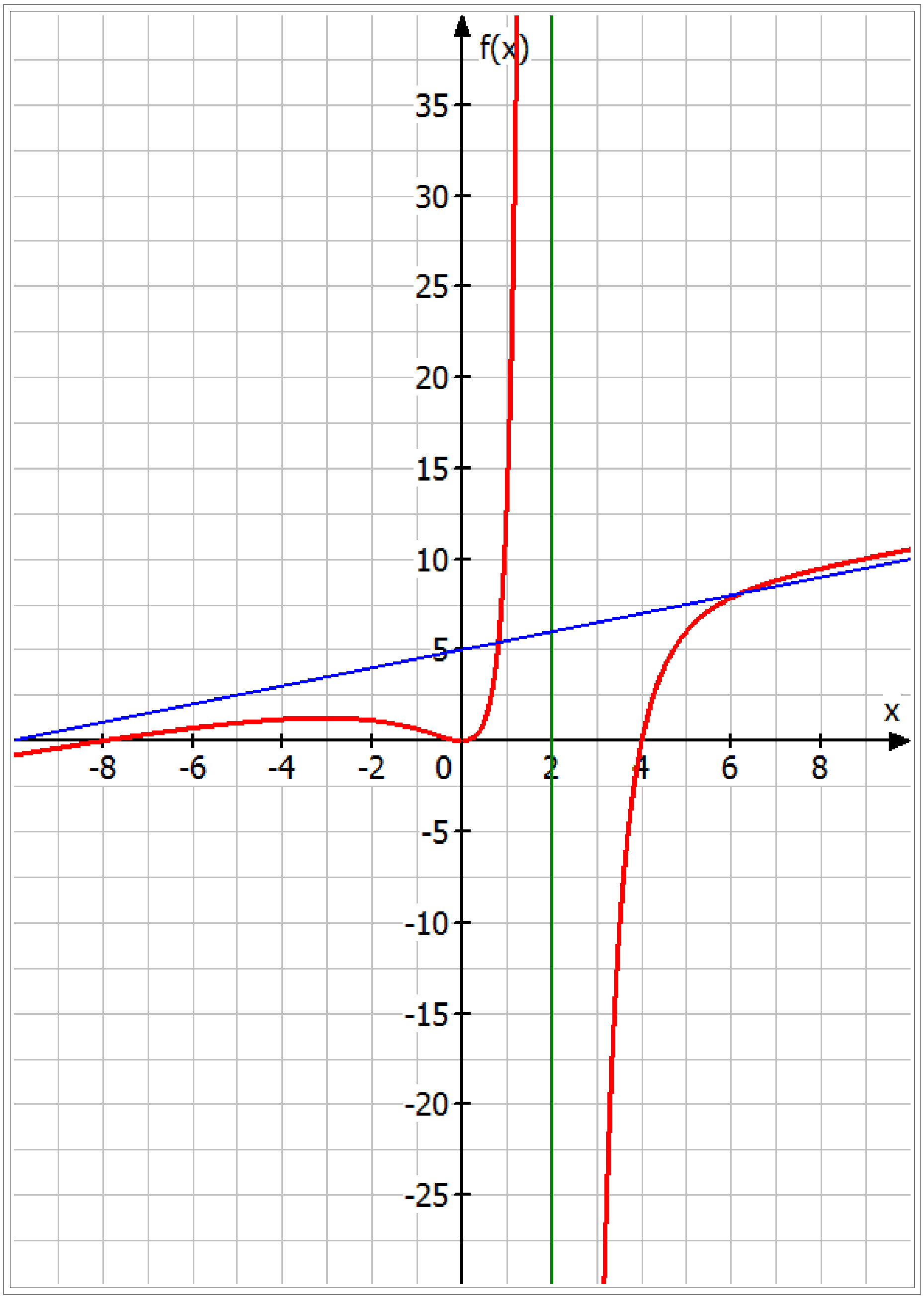
Weil $Zähergrad - Nennergrad = 1$, muss die Asymptote eine lineare Funktion sein.

1.7 Bestimme mit Hilfe einer Rechnung das Grenzwertverhalten der Funktion an der Polstelle.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{0.5x^4+2x^3-16x^2}{x^3-6x^2+12x-8}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{0{,}5\cdot x^2\cdot(x+8)\cdot(x-4)}{(x-2)^3}=+\infty \qquad \left(\frac{+\ \cdot\ +\ \cdot\ +\ \cdot\ -}{-}=\ +\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{0.5x^4+2x^3-16x^2}{x^3-6x^2+12x-8}=-\infty$$ weil bei einer dreifachen Polstelle das Vorzeichen wechseln muss.

<u>1.8</u> Zeichne die Nullstellen, senkrechten Asymptoten und waagerechten oder schiefen Asymptoten in der Koordinatensystem auf der Rückseite des Blattes ein. Skizziere anschließend den Funktionsverlauf mit einem farbigen Stift (nicht rot).



Mathematik GK m3, 2. KA – gebr. rat. Funktionen / Steigungen – Lösung 20.04.2015

Aufgabe 2: Durchschnittliche und momentane Steigungen

2.1 Berechne den Differenzenquotienten für die Funktion $f(x)=2x^2+4$ im Intervall $[2;6]$.

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{2\cdot 6^2+4-(2\cdot 2^2+4)}{4}=\frac{72+4-8-4}{4}=\frac{64}{4}=\mathbf{16}$$

2.2 Berechne die lineare Näherungsfunktion für die Funktion $f(x)=2^x$ im Intervall $[1;4]$.

Steigung: $m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{2^4-2^1}{3}=\frac{16-2}{3}=\frac{14}{3}$ Der Punkt $(1|f(1))$ liegt auf dem Graphen von f und auf dem Graphen der linearen Näherungsfunktion, welche die allgemeine Funktionsgleichung $g(x)=mx+n$ hat. Steigung und Punkt einsetzen:

$$g(1)=m\cdot 1+n \;\Leftrightarrow\; 2^1=\frac{14}{3}\cdot 1+n \quad \Big|\, -\frac{14}{3} \quad \Leftrightarrow\; \frac{6}{3}-\frac{14}{3}=n \;\Leftrightarrow\; -\frac{8}{3}=n$$

Damit ist $\mathbf{g(x)=\frac{14}{3}x-\frac{8}{3}}$

2.3 Berechne den Differentialquotienten für die Funktion $f(x)=2x^2+4$ an der Stelle $x_0=2$ mit der „h-Methode“.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2\cdot(2+h)^2+4)-(2\cdot 2^2+4)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot(2^2+2\cdot 2h+h^2)+4-(8+4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{8+8h+2h^2+4-8-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{8h+2h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(8+2h)=\mathbf{8}$$

2.4 Berechne den Differentialquotienten für die Funktion $f(x)=2x^2+4$ an der Stelle $x_0=2$ mit der „x-Methode“.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+4-(2\cdot 2^2+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x^2-4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(2(x+2))=2\cdot(2+2)=\mathbf{8}$$

Aufgabe 3: Halfpipe

Wenn ein Skateboard über den Rand einer Halfpipe fährt, bewegt es sich genau in die Richtung weiter, die es zuletzt auf der Halfpipe hatte, (wenn wir Kleinigkeiten wir die Erdgravitation außer acht lassen).

Nehmen wir an die Form der Halfpipe folgt der Funktion $f(x)=\frac{1}{40}x^4-2$ im Intervall $[-3;+3]$.

Die Halfpipe ist also insgesamt 5 m breit. Berechne die Funktion, welche die geradlinige Flugbahn des Skateboards beschreibt, sobald das Skateboard die Halfpipe auf der rechten Seite verlässt.

Gesucht ist die Funktionsgleichung der Tangente an der Stelle $x_0=3.$ Die Steigung ist gleich dem Differentialquotienten:

$$m=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\frac{1}{40}x^4-2\right)-\left(\frac{1}{40}3^4-2\right)}{x-3}=\frac{1}{40}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-2)-(3^4-2)}{x-3}$$

$$m=\frac{1}{40}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\frac{1}{40}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+9)(x^2-9)}{x-3}=\frac{1}{40}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+9)(x+3)(x-3)}{x-3}$$

$$=\frac{1}{40}\cdot\lim_{x\to 3}(x^2+9)(x+3)=\frac{1}{40}\cdot(3^2+9)(3+3)=\frac{1}{40}\cdot 18\cdot 6=\frac{108}{40}=\frac{27}{10}=2{,}7$$

Der Punkt $(3|f(3))$ liegt auf dem Graphen von f und auf dem Graphen der Tangenten, welche die allgemeine Funktionsgleichung $g(x)=mx+n$ hat. Steigung und Punkt einsetzen:

$$g(3)=m\cdot 3+n \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{40}\cdot 3^4-2=\frac{27}{10}\cdot 3+n \quad \Big|\; -\frac{81}{10} \quad \Leftrightarrow\; \frac{1}{40}-\frac{81}{10}=n$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{1}{40}-\frac{324}{40}=n \;\Leftrightarrow\; -\frac{323}{40}=n \;\Leftrightarrow\; -\frac{323}{40}=n$$

Also ist $\boldsymbol{g(x)=\frac{27}{10}x-\frac{323}{40}}$