Mathematik GK m3, 1. Kursarbeit – Funktionen – Lösung B 17.11.2014

Aufgabe 1: Erkläre kurz die folgenden Begriffe.

1.1 Graph einer Funktion: *Die Menge aller Punkte mit den Koordinaten (x | Funktionswert an der Stelle x).*
1.2 Umkehrfunktion: *Eine eindeutige Zuordnung, welche die Zuordnung durch eine andere Funktion rückgängig macht, also Elementen der Zielmenge der anderen Funktion Elementen der Definitionsmenge zuordnet.*
1.3 Ganzrationale Funktion: *Eine Funktion, deren Funktionsterm ein Polynom ist, also ein Summenterm* $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 (\cdot x^0)$

Aufgabe 2: Löse die folgenden Aufgaben.

Nr.	Funktion	Aufgabe
2.1	$f(x)=2x^3-x^2+2$	Berechne $f(2)$. $\boldsymbol{f(2)}=2\cdot 2^3-2^2+2=16-4+2=\mathbf{14}$
2.2	$g(x)=4x-8$	Berechne alle Nullstellen von g. $0=4x_n-8 \quad \vert +8 \;\Leftrightarrow\; 8=4x_n \quad \vert :4 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{2=x_n}$
2.3	$h(x)=x^2-4$	Berechne alle Stellen, an denen die Funktion den Wert -3 annimmt. $-3=x_1^2-4 \quad \vert +4 \;\Leftrightarrow\; 1=x_1^2 \quad \vert \sqrt{\ } \;\Leftrightarrow\; \mathbf{\pm 1=x_{1/2}}$
2.4	$p(x)=-0{,}5x^2+3x-2$	Berechne den Scheitelpunkt. $p(x)=-0{,}5x^2+3x-2$ $=-0{,}5(x^2-6x)-2$ $=-0{,}5(x^2-6x+9-9)-2$ $=-0{,}5[(x-3)^2-9]-2$ $=-0{,}5(x-3)^2+4{,}5-2$ $=-0{,}5(x-2)^2+2{,}5$ **A: Der Scheitelpunkt ist** $\boldsymbol{S(3\vert 2{,}5)}$.
2.5	$q(x)=4x-5$	Berechne die Umkehrfunktion, falls möglich. $y=4x-5 \quad \vert +5 \;\Leftrightarrow\; y+5=4x \quad \vert :4 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{5}y+\frac{5}{4}=x$ $\boldsymbol{q^{-1}(x)=\frac{1}{5}x+\frac{5}{4}}$
2.6	$i(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$	Berechne alle Nullstellen und gib den Definitionsbereich der Funktion an, d.h. alle Werte, die man für x einsetzen kann. $i(x)=\frac{-0{,}5x^2+3x-2}{4x-5}$ *Nullstellen: Wenn der Zähler Null wird, wird auch die ganze Funktion Null. Also Untersuchung des Zählers:* $0=-0{,}5x_n^2+3x-2 \quad \vert :(-0{,}5)$ $0=x_n^2-6x_n-4$ *p-q-Formel oder quadratische Erg.* $x_{1/2}=3\pm\sqrt{3^2+2}=3\pm\sqrt{11}$ *Verbotene x-Werte: Der Nenner darf nicht Null werden. Also Untersuchung des Nenners:* $0=4x_3-5 \quad \vert +5 \;\Leftrightarrow\; 5=4x_3 \quad \vert :4 \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{4}=x_3$ *Also: Nullstellen* $\mathbf{x_1=3-\sqrt{11}\,;\, x_2=3+\sqrt{11}}$ *Definitionsbereich:* $\boldsymbol{D=\mathbb{R}\setminus\{1{,}25\}}$

2.7	$k(x)=x^3-3x^2+2x$	Berechne alle Nullstellen. $0=x_n^3-3x_n^2+2x_n=x_n\left(x_n^2-3x_n+2\right)$ *Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist: Also* $\boldsymbol{x_1=0}$ *Betrachte Klammer:* $0=x_n^2-3x_n+2$ p-q-Formel: $x_{2/3}=1{,}5\pm\sqrt{1{,}5^2-2}=1{,}5\pm\sqrt{2{,}25-2}=1{,}5\pm\sqrt{0{,}25}=1{,}5\pm0{,}5$ Also $\boldsymbol{x_2}=1{,}5-0{,}5=\mathbf{1}$; $\boldsymbol{x_3}=1{,}5+0{,}5=\mathbf{2}$
2.8	$b_t(x)=0{,}5\,x^2-tx$	Berechne $b_3(6)$ $\boldsymbol{b_3(6)}=0{,}5\cdot6^2-3\cdot6=18-18=\mathbf{0}$

Aufgabe 3: Die angegebenen Punkte liegen auf dem Graphen der ganzrationalen Funktion *f* mit dem Grad *n*.

Nr.	Angaben	Aufgabe
3.1	$f(x)=2x+2\,;\,A(1\mid y)$	Berechne *y*. *Punkt einsetzen:* $\boldsymbol{y}=2\cdot1+2=2+2=\mathbf{4}$
3.2	$f(x)=5000x^3+\frac{1}{100}\cdot x^7+12$	Gib *n* an. $\boldsymbol{n=7}$
3.3	$f(x)=x(x^2+4)+0\cdot x^4$	Gib *n* an. $\boldsymbol{n=3}$, *weil* $f(x)=x(x^2+4)+0\cdot x^5=x^3+4x$
3.4	$f(x)=(x-7)\cdot(x-6)\cdot(x-5)\cdot(x-4)\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x-1)$ Gib *n* und alle Nullstellen an. $\boldsymbol{n=7}$, *denn der erste Summand nach dem Ausmultiplizieren ist* x^7. $0=(x_n-7)\cdot(x_n-6)\cdot(x_n-5)\cdot(x_n-4)\cdot(x_n-3)\cdot(x_n-2)\cdot(x_n-1)$ *Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist: Also* $\boldsymbol{x_1=1\,;\,x_2=2\,;\,x_3=3\,;\,x_4=4\,;\,x_5=5\,;\,x_6=6\,;\,x_7=7}$	
3.5	$n=2\,;\,A(-3\mid0),\,B(0\mid6),\,C(2\mid-10)$ Bestimme *f* mit Hilfe einer Rechnung. *Punkte in* $f(x)=ax^2+bx+c$ *einsetzen:* $I.\quad 0=a\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)+c$ $II.\quad 6=a\cdot(0)^2+b\cdot(0)+c$ $III.\quad -10=a\cdot(2)^2+b\cdot(2)+c$ $I.\quad 0=9a-3b+c \quad \mid \cdot2$ $II.\quad 6=c$ $III.\quad -10=4a+2b+c \quad \mid \cdot3$	$c=6$ *einsetzen:* $I.\quad 0=18a-6b+12 \quad \mid I.+III.$ $III.\quad -30=12a+6b+18$ $-30=30a+30 \quad \mid -30$ $\Leftrightarrow -60=30a \quad \mid :30$ $\Leftrightarrow -2=a$ $a=-2$ *und* $c=6$ *in I. einsetzen:* $I.\quad 0=9\cdot(-2)-3b+6 \quad \mid +3b$ $\Leftrightarrow 3b=-12 \quad \mid :3$ $\Leftrightarrow b=-4$ Damit ist $\boldsymbol{f(x)=-2x^2-4x+6}$.

Mathematik GK m3, 1. Kursarbeit – Funktionen – Lösung B **17.11.2014**

<u>Aufgabe 4:</u> Sekt bildet beim Einschenken eine Schaumkrone, die sehr schnell zerfällt. Zu Beginn ist die Schaumkrone 2 cm hoch. Alle 2 Sekunden verliert die Schaumkrone 50% ihrer Höhe.

Berechne die Zeit, nach welcher die Schaumkrone noch 2 mm hoch ist.

Gesucht ist die Zuordnung Vergangene Zeit → Höhe der Schaumkrone. Es handelt sich um eine Exponentialfunktion vom Typ $f(t)=b\cdot a^t$

Am Anfang $(t=0)$ *ist die Schaumkrone 2 cm hoch. Der Punkt* $(0|2)$ *liegt also auf dem Graphen der gesuchten Funktion.*

Nach 2 sek hat die Schaumkrone die Hälfte ihrer Höhe verloren. Der Punkt $(2|1)$ *liegt also auf dem Graphen der gesuchten Funktion.*

Einsetzen der Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung:

$I.\quad 2=b\cdot a^0 \Leftrightarrow 2=b\cdot 1 \Leftrightarrow 2=b$
$II.\quad 1=b\cdot a^2$ Einsetzen von $b=2$:

$$1=2\cdot a^2 \quad | :2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}=a^2 \quad | \ ^{\frac{1}{2}} oder \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}=a$$ *bzw.* $a=2^{-\frac{1}{2}}$

Damit ist $f(t)=2\cdot\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^t=5\cdot 2^{-\frac{t}{2}}$

$2\,mm=0{,}2\,cm.$ Gesucht ist die x-Koordinate (bzw. t-Koordinate) des Punktes $(t_1|0{,}2)$. Einsetzen:

$$0{,}2=2\cdot 2^{-\frac{t_1}{2}} \quad | :2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}=2^{-\frac{t_1}{2}} \quad | :\ln$$ *(lg oder $\log_2$ funktioniert auch)*
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{10}\right)=\ln\left(2^{-\frac{t_1}{2}}\right) \quad | \ T$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(10^{-1}\right)=-\frac{t_1}{2}\cdot\ln(2) \quad | \cdot\frac{-2}{\ln(2)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(-1)\cdot\ln(10)\cdot(-2)}{\ln(2)}=t_1$$
$$\Leftrightarrow t_1=\frac{2\cdot\ln(10)}{\ln(2)}\approx 6{,}64$$

A: Nach etwa 7 sek ist die Schaumkrone noch 2 mm hoch.

<u>Aufgabe 5:</u> Bestimme zeichnerisch die Umkehrabbildung der eingezeichneten Funktion. Kennzeichne die Bereiche der Umkehrabbildung, die bewirken, dass sich bei der Umkehrabbildung nicht um eine Funktion handelt. Berarbeite die Aufgabe auf diesem Blatt.

Die blaue Kurve ist die Lösung.