## Mathematik GK m3, 1. Kursarbeit – Funktionen – Lösung A 17.11.2014

**Aufgabe 1:** Erkläre kurz die folgenden Begriffe.

**1.1** Nullstelle: *Diejenigen x-Werte, für die eine Funktion die Funktionswerte 0 annimmt.*
*Oder: Die x-Koordinaten der Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse.*
**1.2** Funktion: *Eine eindeutige Zuordnung von Elementen einer Definitionsmenge zu Elementen einer Zielmenge*
**1.3** Gebrochen Rationale Funktion: *Eine Funktion, bei der es einen Nenner mit einem Polynom vom Grad n>0 gibt.*

**Aufgabe 2:** Löse die folgenden Aufgaben.

| Nr. | Funktion | Aufgabe |
|---|---|---|
| **2.1** | $f(x)=x^3-2x^2-1$ | Berechne $f(3)$. $\boldsymbol{f(3)}=3^3-2\cdot 3^2-1=27-18-1=\mathbf{8}$ |
| **2.2** | $g(x)=2x-2$ | Berechne alle Nullstellen von g.<br>$0=2x_n-2 \quad \vert +2 \Leftrightarrow 2=2x_n \quad \vert :2 \Leftrightarrow \boldsymbol{1=x_n}$ |
| **2.3** | $h(x)=x^2-2$ | Berechne alle Stellen, an denen die Funktion den Wert -1 annimmt.<br>$-1=x_1^2-2 \quad \vert +2 \Leftrightarrow 1=x_1^2 \quad \vert \sqrt{\ } \Leftrightarrow \boldsymbol{\pm 1=x_{1/2}}$ |
| **2.4** | $p(x)=-0{,}5x^2+2x+2$ | Berechne den Scheitelpunkt.<br>$p(x)=-0{,}5x^2+2x+2$<br>$=-0{,}5(x^2-4x)+2$<br>$=-0{,}5(x^2-4x+4-4)+2$<br>$=-0{,}5[(x-2)^2-4]+2$<br>$=-0{,}5(x-2)^2+2+2$<br>$=-0{,}5(x-2)^2+4$<br><br>**A: Der Scheitelpunkt ist** $\boldsymbol{S(2\vert 4)}$. |
| **2.5** | $q(x)=2x-10$ | Berechne die Umkehrfunktion, falls möglich.<br>$y=2x-10 \quad \vert +10 \Leftrightarrow y+10=2x \quad \vert :2 \Leftrightarrow 0{,}5y+5=x$<br><br>$\boldsymbol{q^{-1}(x)=0{,}5x+5}$ |
| **2.6** | $i(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ | Berechne alle Nullstellen und gib den Definitionsbereich der Funktion an, d.h. alle Werte, die man für x einsetzen kann.<br>$i(x)=\dfrac{-0{,}5x^2+2x+2}{2x-10}$<br>*Nullstellen: Wenn der Zähler Null wird, wird auch die ganze Funktion Null. Also Untersuchung des Zählers:*<br>$0=-0{,}5x_n^2+2x_n+2 \quad \vert :(-0{,}5)$<br>$0=x_n^2-4x_n-4$ *p-q-Formel oder quadratische Erg.*<br>$x_{1/2}=2\pm\sqrt{2^2+4}=2\pm\sqrt{8}=2\pm 2\sqrt{2}$<br>*Verbotene x-Werte: Der Nenner darf nicht Null werden. Also Untersuchung des Nenners:*<br>$0=2x_3-10 \quad \vert +10 \Leftrightarrow 10=2x_3 \quad \vert :2 \Leftrightarrow 5=x_3$<br><br>*Also: Nullstellen* $\boldsymbol{x_1=2-2\sqrt{2}\,;\, x_2=2+\sqrt{2}}$<br>*Definitionsbereich:* $\boldsymbol{D=\mathbb{R}\setminus\{5\}}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **2.7** | $k(x)=x^3-5x^2+6x$ | Berechne alle Nullstellen.<br>$0=x_n^3-5x_n^2+6x_n=x_n\left(x_n^2-5x_n+6\right)$<br>*Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist: Also* $\boldsymbol{x_1=0}$<br>*Betrachte Klammer:*<br>$0=x_n^2-5x_n+6$ p-q-Formel:<br>$x_{2/3}=2{,}5\pm\sqrt{2{,}5^2-6}=2{,}5\pm\sqrt{6{,}25-6}=2{,}5\pm\sqrt{0{,}25}=2{,}5\pm0{,}5$<br>Also $\boldsymbol{x_2}=2{,}5-0{,}5=\boldsymbol{2}\,;\,\boldsymbol{x_3}=2{,}5+0{,}5=\boldsymbol{3}$ |
| **2.8** | $b_t(x)=2x^2+tx$ | Berechne $b_2(4)$<br>$\boldsymbol{b_2(4)}=2\cdot4^2+2\cdot4=32+8=\boldsymbol{40}$ |

**Aufgabe 3:** Die angegebenen Punkte liegen auf dem Graphen der ganzrationalen Funktion *f* mit dem Grad *n*.

| Nr. | Angaben | Aufgabe |
|---|---|---|
| **3.1** | $f(x)=3x-1\,;\,A(1\|y)$ | Berechne *y. Punkt einsetzen:*<br>$\boldsymbol{y}=3\cdot1-1=3-1=\boldsymbol{2}$ |
| **3.2** | $f(x)=-1000x^2+\frac{1}{1000}\cdot x^{11}-2$ | Gib *n* an. $\boldsymbol{n=11}$ |
| **3.3** | $f(x)=x(x^2-2)+0\cdot x^5$ | Gib *n* an. $\boldsymbol{n=3}$, *weil*<br>$f(x)=x(x^2-2)+0\cdot x^5=x^3-2x$ |
| **3.4** | $f(x)=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-6)\cdot(x-7)$<br>Gib *n* und alle Nullstellen an.<br>$\boldsymbol{n=7}$, *denn der erste Summand nach dem Ausmultiplizieren ist* $x^7$.<br>$0=(x_n-1)\cdot(x_n-2)\cdot(x_n-3)\cdot(x_n-4)\cdot(x_n-5)\cdot(x_n-6)\cdot(x_n-7)$ *Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist: Also* $\boldsymbol{x_1=1\,;x_2=2\,;x_3=3\,;x_4=4\,;x_5=5\,;x_6=6\,;x_7=7}$ | |
| **3.5** | $n=2\,;\,A(-1\|2),\,B(0\|-1),\,C(4\|7)$<br>Bestimme *f* mit Hilfe einer Rechnung.<br>*Punkte in* $f(x)=ax^2+bx+c$ *einsetzen:*<br>*I.* $2=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c$<br>*II.* $-1=a\cdot(0)^2+b\cdot(0)+c$<br>*III.* $7=a\cdot(4)^2+b\cdot(4)+c$<br><br>*I.* $2=a-b+c \quad \| \cdot4$<br>*II.* $-1=c$<br>*III.* $7=16a+4b+c$ | $c=-1$ *einsetzen:*<br><br>*I.* $8=4a-4b-4 \quad \| \; I.+III.$<br>*III.* $7=16a+4b-1$<br><br>$15=20a-5 \quad \| +5$<br>$\Leftrightarrow 20=20a \quad \| :20$<br>$\Leftrightarrow 1=a$<br><br>$a=1$ *und* $c=-1$ *in I. einsetzen:*<br><br>*I.* $2=1-b-1 \quad \| \cdot(-1)$<br>$\Leftrightarrow b=-2$<br><br>Damit ist $\boldsymbol{f(x)=x^2-2x-1}$. |

**Aufgabe 4:** Ein frisch gezapftes Bier hat eine Schaumkrone von 5 cm Höhe. Alle 30 Sekunden verliert die Schaumkrone 50% ihrer Höhe.

Berechne die Zeit, nach welcher die Schaumkrone noch 5 mm hoch ist.

*Gesucht ist die Zuordnung Vergangene Zeit → Höhe der Schaumkrone. Es handelt sich um eine Exponentialfunktion vom Typ* $f(t)=b\cdot a^t$

*Am Anfang* $(t=0)$ *ist die Schaumkrone 5 cm hoch. Der Punkt* $(0|5)$ *liegt also auf dem Graphen der gesuchten Funktion.*

*Nach 30 sek hat die Schaumkrone die Hälfte ihrer Höhe verloren. Der Punkt* $(30|2{,}5)$ *liegt also auf dem Graphen der gesuchten Funktion.*

*Einsetzen der Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung:*

$I.\quad 5=b\cdot a^0 \Leftrightarrow 5=b\cdot 1 \Leftrightarrow 5=b$
$II.\quad 2{,}5=b\cdot a^{30}$ Einsetzen von $b=5$:

$$2{,}5=5\cdot a^{30} \quad | :5$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}=a^{30} \quad | ^{\frac{1}{30}} oder \sqrt[30]{}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{\frac{1}{30}}}=a \quad \textit{bzw.} \quad a=2^{-\frac{1}{30}}$$

*Damit ist* $f(t)=5\cdot\left(2^{-\frac{1}{30}}\right)^t=5\cdot 2^{-\frac{t}{30}}$

$5\,mm=0{,}5\,cm$. Gesucht ist die x-Koordinate (bzw. t-Koordinate) des Punktes $(t_1|0{,}5)$. Einsetzen:

$$0{,}5=5\cdot 2^{-\frac{t_1}{30}} \quad | :5$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}=2^{-\frac{t_1}{30}} \quad | :\ln \quad \textit{(lg oder log}_2\textit{ funktioniert auch)}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{10}\right)=\ln\left(2^{-\frac{t_1}{30}}\right) \quad | \; T$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(10^{-1}\right)=-\frac{t_1}{30}\cdot\ln(2) \quad | \cdot\frac{-30}{\ln(2)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(-1)\cdot\ln(10)\cdot(-30)}{\ln(2)}=t_1$$
$$\Leftrightarrow t_1=\frac{30\cdot\ln(10)}{\ln(2)}\approx 99{,}66$$

**A: Nach etwa 100 sek ist die Schaumkrone noch 5 mm hoch.**

**Aufgabe 5:** Bestimme zeichnerisch die Umkehrabbildung der eingezeichneten Funktion. Kennzeichne die Bereiche der Umkehrabbildung, die bewirken, dass sich bei der Umkehrabbildung nicht um eine Funktion handelt. Berarbeite die Aufgabe auf diesem Blatt.

*Die blaue Kurve ist die Lösung.*