

Aufgabe 1: Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion

1.1 $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^0$

Induktionsanfang $n=0$:

linke Seite: $\sum_{k=0}^0 k^2 = 0$ rechte Seite: $\frac{1}{6} \cdot 0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1) = 0$ o.k.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$: $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2$ Behauptung einsetzen:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1) \cdot [n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1) \cdot (2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1) \cdot (2n^2 + 7n + 6)}{6} \end{aligned}$$

(weil $(k+2)(2k+3) = 2k^2 + 3k + 4k + 6 = 2k^2 + 7k + 6$)

$$= \frac{1}{6} (n+1) [(n+2)(2n+3)] = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2(n+1)+1) \quad \text{q.e.d.}$$

1.2 $\prod_{k=1}^n 4^k = 2^{n(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang $n=1$: linke Seite: $\prod_{k=1}^1 4^k = 4^1 = 4$ rechte Seite: $2^{1(1+1)} = 2^2 = 4$ o.k.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$: $\prod_{k=1}^{n+1} 4^k = 4^{n+1} \cdot \prod_{k=1}^n 4^k$ Behauptung einsetzen:

$$= 4^{n+1} \cdot 2^{n(n+1)} = (2^2)^{n+1} \cdot 2^{n(n+1)} = 2^{2(n+1)} \cdot 2^{n(n+1)} = 2^{2(n+1) + n(n+1)} = 2^{(n+1)(n+2)} \quad \text{q.e.d.}$$

1.3 $n! > 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}; n \geq 4$

Induktionsanfang $n=4$: linke Seite: $4! = 24 > 16 = 2^4$ o.k.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$: $(n+1)! = n! \cdot (n+1) > 2^n \cdot (n+1) > 2^n \cdot 2 = 2^{(n+1)}$ q.e.d.
Behauptung weil $n+1 > 4$

1.4 $\sum_{k=2}^n \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}; n \geq 2$

Induktionsanfang $n=2$: linke Seite: $\sum_{k=2}^2 \frac{2k-3}{3^k} = \frac{2 \cdot 2 - 3}{3^2} = \frac{1}{9}$ rechte Seite: $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{9}$

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$: $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k-3}{3^k} = k = \sum_{k=2}^n \frac{2k-3}{3^k} + \frac{2 \cdot (n+1) - 3}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n} + \frac{2 \cdot (n+1) - 3}{3^{n+1}}$
 $= \frac{1}{3} - \frac{3n}{3 \cdot 3^n} + \frac{2n+2-3}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \left(\frac{3n}{3^{n+1}} - \frac{2n-1}{3^{n+1}} \right) = \frac{1}{3} - \frac{3n-2n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3^{n+1}}$ q.e.d. Behauptung

1.5 $n^4 - 4n^2$ ist durch 3 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}^0$

Behauptung umformuliert: $\frac{n^4 - 4n^2}{3} = m, m \in \mathbb{Z}$

Induktionsanfang $n=0$: $\frac{0^4 - 4 \cdot 0^2}{3} = \frac{0}{3} = 0, 0 \in \mathbb{Z}$ o.k.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$: $\frac{(n+1)^4 - 4(n+1)^2}{3} = \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - (4n^2 + 8n + 4)}{3}$
 $= \frac{n^4 + 4n^3 + 2n^2 - 4n - 3}{3} = \frac{n^4 - 4n^2 + 4n^3 + 6n^2 - 4n - 3}{3} = \frac{n^4 - 4n^2}{3} + \frac{3n^3 + 6n^2 - 3n - 3}{3} + \frac{n^3 - n}{3}$
 $= m + n^3 + 2n^2 - n - 1 + \frac{n(n^2 - 1)}{3} = m + n^3 + 2n^2 - n - 1 + \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$

Unter Benutzung der Behauptung sind alle außer dem letzten Summanden ganze Zahlen. Der letzte Summand ist das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Davon muss also eine durch 3 teilbar sein. Somit ergibt auch der letzte Summand eine ganze Zahl. q.e.d.

1.6 $\sum_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n a_k \leq n-1 \quad \forall n \in \mathbb{N}; a \in]0; 1[\subset \mathbb{R}$

Induktionsanfang $n=0$: $\sum_{k=1}^1 a_k - \prod_{k=1}^1 a_k = a_1 - a_1 = 0 \leq 0 = 1 - 1$ o.k.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + a_{n+1} - \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot a_{n+1}$ a_{n+1} ausklammern:
 $= \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + a_{n+1} \cdot \left(1 - \prod_{k=1}^n a_k \right) < \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + 1 \cdot \left(1 - \prod_{k=1}^n a_k \right) = \sum_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n a_k + 1 \leq n - 1 + 1 = n$ q.e.d.
weil $a_{n+1} < 1$ Behauptung

Mathematik LK 12, AB 01, AB 01 – Wdh: Vollständige Induktion – Lösung 22.10.2013

1.7 $\sum_{k=1}^n k(k!) = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang $n=1$: linke Seite: $\sum_{k=1}^1 k(k!) = 1 \cdot 1! = 1$ rechte Seite: $(1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ o.k.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k!) &= \left(\sum_{k=1}^n k(k!) \right) + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)! \cdot (1 + (n+1)) - 1 \\ &\quad \text{Behauptung} \qquad \qquad \qquad (n+1)! \text{ ausklammern} \\ &= (n+1)! \cdot (n+2) - 1 = (n+2)! - 1 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

1.8 Bernoullische Ungleichung: $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R}; x \geq 1$

Induktionsanfang $n=1$: $(1+x)^1 = 1+x \geq x = 1 \cdot x$ o.k.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq nx \cdot (1+x) \geq nx \cdot (1+1) = 2nx = (n+n)x \geq (n+1)x \quad \text{q.e.d.}$$

Behauptung weil $x \geq 1$ weil $n \geq 1$

1.9 Verallgemeinerte Bernoullische Ungleichung: $\prod_{k=1}^n (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k \quad \forall n \in \mathbb{N}; x_k \in \mathbb{R}; x_k \geq 1$

Induktionsanfang $n=1$: $\prod_{k=1}^1 (1+x_k) = 1+x_1 \geq 1+x_1 = 1 + \sum_{k=1}^1 x_k$ o.k.

$$\begin{aligned} \text{Induktionsschritt } n \rightarrow n+1: \quad \prod_{k=1}^{n+1} (1+x_k) &= \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k) \right) \cdot (1+x_{n+1}) \geq \left(1 + \sum_{k=1}^n x_k \right) \cdot (1+x_{n+1}) \\ &\quad \text{Behauptung} \\ &= 1 + x_{n+1} + \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \sum_{k=1}^n x_k = 1 + \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \sum_{k=1}^n x_k > 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k \quad \text{q.e.d.} \\ &\quad \text{dritter Summand } > 0 \end{aligned}$$

1.10 $(1+a)^n \leq 1+(2^n-1)a \quad \forall n \in \mathbb{N}; a \in [0;1] \subset \mathbb{R}$

Induktionsanfang $n=1$: $(1+a)^1 = 1+a \leq 1+a = 1+(2-1)a = 1+(2^1-1)a$ o.k.

$$\begin{aligned} \text{Induktionsschritt } n \rightarrow n+1: \quad (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1+(2^n-1)a) \cdot (1+a) \\ &\quad \text{Behauptung} \\ &= 1+a+(2^n-1)a+(2^n-1)a^2 = 1+a \cdot (1+(2^n-1)+(2^n-1) \cdot a) = 1+a \cdot (2^n+a2^n-a) \\ &\quad \text{a ausklammern} \\ &\leq 1+a \cdot (2^n+1 \cdot 2^n-1) = 1+a(2 \cdot 2^n-1) = 1+a(2^{n+1}-1) < a \cdot (2^{n+1}-1) \\ &\text{weil } a <= 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{1.11} \quad \sum_{k=1}^n k x^k = \frac{x}{(x-1)^2} \cdot (n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R}; x \neq 1$$

Induktionsanfang $n=1$:

$$\sum_{k=1}^1 k x^k = 1 \cdot x^1 = x = \frac{x}{(x-1)^2} (x-1)^2 = \frac{x}{(x-1)^2} \cdot (x^2 - 2x + 1) = \frac{x}{(x-1)^2} \cdot (1x^{1+1} - (1+1)x^1 + 1) \quad \text{o.k.}$$

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k x^k &= \left(\sum_{k=1}^n k x^k \right) + (n+1)x^{n+1} = \frac{x}{(x-1)^2} \cdot (n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1) + (n+1)x^{n+1} \\ &\stackrel{\text{Behauptung}}{=} \frac{x}{(x-1)^2} \cdot (n x^{n+1}) - \frac{x}{(x-1)^2} \cdot (n+1)x^n + \frac{x}{(x-1)^2} + (n+1)x^{n+1} \\ &= \frac{n \cdot x^{n+2}}{(x-1)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{(x-1)^2} + \frac{x}{(x-1)^2} + \frac{(x-1)^2 \cdot (n+1)x^{n+1}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{n \cdot x^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (x^2 - 2x + 1) \cdot (n+1)x^{n+1}}{(x-1)^2} = \frac{n \cdot x^{n+2} + x + (n+1)x^{n+1} \cdot (-1 + x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} \\ &\hspace{10em} (n+1)x^{n+1} \text{ ausklammern} \\ &= \frac{n \cdot x^{n+2} + x + (n+1)x^{n+1} \cdot x(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{x}{(x-1)^2} \cdot (n x^{n+1} + 1 + (n+1) \cdot x^{n+1} \cdot (x-2)) \quad \text{ausmultiplizieren} \\ &\hspace{10em} x \text{ ausklammern} \\ &= \frac{x}{(x-1)^2} \cdot (n x^{n+1} + 1 + (n x^{n+1} + x^{n+1}) \cdot (x-2)) \quad \text{ausmultiplizieren} \\ &= \frac{x}{(x-1)^2} \cdot (n x^{n+1} + 1 + (x n x^{n+1} - 2 n x^{n+1} + x \cdot x^{n+1} - 2 x^{n+1})) \\ &= \frac{x}{(x-1)^2} \cdot (n x^{n+1} + n x^{n+2} - 2 n x^{n+1} + x^{n+2} - 2 x^{n+1} + 1) \quad x^{n+2} \text{ und } x^{n+1} \text{ ausklammern} \\ &= \frac{x}{(x-1)^2} \cdot (x^{n+2} \cdot (n+1) + x^{n+1} \cdot (n - 2n - 2) + 1) = \frac{x}{(x-1)^2} \cdot ((n+1)x^{n+2} + (-n-2)x^{n+1} + 1) \\ &= \frac{x}{(x-1)^2} \cdot ((n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$