

Aufgabe 1: Hochwasserwelle

Während einer Hochwasserwelle wurde in einer Stadt der Wasserstand h des Flusses in Abhängigkeit von der Zeit t gemessen.

Der Funktionsterm der Funktion, die den dargestellten zeitlichen Verlauf der Hochwasserwelle beschreibt, lautet

$$h(t) = \frac{5}{98}t^4 - \frac{65}{49}t^3 + \frac{845}{98}t^2 + 30 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 13 \quad \text{und } t \text{ in Tagen.}$$

a) Berechne den normalen Wasserstand des Flusses, d.h. den Wasserstand zu Beginn der Hochwasserwelle.

$$h(0) = \frac{5}{98} \cdot 0^4 - \frac{65}{49} \cdot 0^3 + \frac{845}{98} \cdot 0^2 + 30 = 30$$

A: Vor dem Hochwasser lag der Wasserstand des Flusses bei 30 cm.

b) Berechne, wie stark der Wasserstand am Ende des ersten Tages der Hochwasserwelle pro Tag bzw. pro Stunde stieg.

Die Ableitung gibt die Stärke des Anstiegs an:

$$\begin{aligned} h'(t) &= 4 \cdot \frac{5}{98}t^3 - 3 \cdot \frac{65}{49}t^2 + 2 \cdot \frac{845}{98}t \\ &= \frac{10}{49}t^3 - \frac{195}{49}t^2 + \frac{845}{49}t \\ &= \frac{5}{49}(2t^3 - 39t^2 + 169t) \end{aligned}$$

Anstieg am Ende des ersten Tages: Ableitung an der Stelle $x = 1$, also $h'(1)$:

$$h'(1) = \frac{5}{49}(2 \cdot 1^3 - 39 \cdot 1^2 + 169 \cdot 1) = \frac{5}{49}(4 - 39 + 169) = \frac{5}{49} \cdot 132 = \frac{660}{49} \approx 13,47$$

Da t in Tagen gemessen wird, ist dies der Anstieg pro Tag.

$$\text{Anstieg in Stunden: } \frac{660}{49} : 24 \approx 0,56$$

A: Am Ende des ersten Tages steigt der Fluss um 13,47 cm pro Tag bzw. 5,6 mm pro Stunde.

c) Berechne, zu welchem Zeitpunkt der Wasserstand am stärksten stieg. Berechnen weiter, wie stark der Wasserstand zu diesem Zeitpunkt pro Tag bzw. pro Stunde stieg.

Zeitpunkt des stärksten Anstiegs ist das Maximum der ersten Ableitung. (Also eine Wendestelle der Ursprungsfunktion mit einem Wechsel von einer Links- in eine Rechtskurve).

Wir suchen also die Extremstellen der 1. Ableitung, das sind potentiell die Nullstellen der zweiten Ableitung.

Bildung der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} h''(t) &= \frac{5}{49} (3 \cdot 2t^2 - 2 \cdot 39t + 169) \\ &= \frac{5}{49} (6t^2 - 78t + 169) \end{aligned}$$

Berechnung der Nullstellen: Zweite Ableitung gleich null setzen

$$0 = \frac{5}{49} (6t_n^2 - 78t_n + 169) \quad | \cdot \frac{49}{5}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 6t_n^2 - 78t_n + 169 \quad | :6$$

$$\Leftrightarrow 0 = t_n^2 - 13t_n + \frac{169}{6} \quad \text{p-q-Formel anwenden:}$$

$$\begin{aligned} t_{n1/2} &= \frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-13}{2}\right)^2 - \frac{169}{6}} \\ &= \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{169}{6}} \\ &= \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{507}{12} - \frac{338}{12}} \\ &= \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{12}} \\ &= \frac{13}{2} \pm \frac{13}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_{n1} = \frac{13}{2} - \frac{13}{\sqrt{12}} \approx 2,75$$

$$\Rightarrow t_{n2} = \frac{13}{2} + \frac{13}{\sqrt{12}} \approx 10,25$$

Diese beiden Werte sind die Kandidaten für Extremstellen der 1. Ableitung (bzw. die Wendestellen der Ursprungsfunktion).

Überprüfung der Kandidaten mit Vorzeichenwechselkriterium:

Wert vor dem ersten Kandidaten:

$$h''(1) = \frac{5}{49}(6 \cdot 1^2 - 78 \cdot 1 + 169) = \frac{5}{49}(6 - 78 + 169) = \frac{485}{49} \approx +9,90$$

Wert zwischen dem ersten und dem zweiten Kandidaten:

$$h''(3) = \frac{5}{49}(6 \cdot 3^2 - 78 \cdot 3 + 169) = \frac{5}{49}(54 - 234 + 169) = -\frac{55}{49} \approx -1,12$$

Wert nach dem zweiten Kandidaten:

$$h''(11) = \frac{5}{49}(6 \cdot 11^2 - 78 \cdot 11 + 169) = \frac{5}{49}(726 - 858 + 169) = -\frac{185}{49} \approx +3,78$$

Bei t_{n1} findet ein Vorzeichenwechsel von + nach – statt. Hier ist also ein Maximum der ersten Ableitung bzw. eine Wendestelle der Ursprungsfunktion mit einem Wechsel von einer Links- in eine Rechtskurve.

Bei t_{n2} findet ein Vorzeichenwechsel von – nach + statt. Hier ist also ein Minimum der ersten Ableitung bzw. eine Wendestelle der Ursprungsfunktion mit einem Wechsel von einer Rechts- in eine Linkskurve.

Der gesuchte Zeitpunkt ist also t_{n1} , die Stelle mit dem Maximum der ersten Ableitung.

Berechnung der Stärke des Anstiegs: Einsetzen von t_{n1} in die 1. Ableitung:

$$h'(t_{n1}) = \frac{5}{49}(2t_{n1}^3 - 39t_{n1}^2 + 169t) = \frac{5}{49}(2t_{n1}^3 - 39t_{n1}^2 + 169t) \approx 21,57$$

Berechnung des Anstiegs pro Stunde: $21,57 : 24 = 0,90$

A: Der stärkste Anstieg liegt nach etwa 2,75 Tagen vor. Das Wasser steigt zu diesem Zeitpunkt um 21,57 cm pro Tag bzw. 9 mm pro Stunde.

d) Die Hochwasserschutzmauer der Stadt reicht bis zu einer Höhe von 1,20 m. Berechne, in welchem Zeitraum Teile der Stadt überflutet waren.

Gesucht sind die Werte für t_s , bei denen der Wasserstand $h(t_s)$ genau 120 cm beträgt. In der Zeit dazwischen liegt der Wasserstand über 1,20 m.

$$120 = \frac{5}{98}t_s^4 - \frac{65}{49}t_s^3 + \frac{845}{98}t_s^2 + 30 \quad | -120 \quad \frac{5}{98}t_s^4 - \frac{65}{49}t_s^3 + \frac{845}{98}t_s^2 - 90 = 0$$

Diese Gleichung lässt sich mit vernünftigem Aufwand leider nicht lösen. Die Lösung lautet $t_{s1} = 6$ und $t_{s2} = 7$.

A: Am gesamten 7. Tag ist die Stadt teilweise überflutet.

e) Berechne, zu welchem Zeitpunkt der höchste Wasserstand erreicht war. Berechne weiter, wie hoch der Wasserstand zu diesem Zeitpunkt war.

Der höchste Wasserstand ist das größte Maximum der Funktion. Also gilt es, die Extremstellen zu berechnen. Kandidaten sind die Nullstellen der 1. Ableitung:

$$0 = \frac{5}{49} (2t_n^3 - 39t_n^2 + 169t_n) \quad | \quad \cdot \frac{49}{5}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2t_n^3 - 39t_n^2 + 169t_n$$

$$\Leftrightarrow 0 = t_n (2t_n^2 - 39t_n + 169) \quad \text{Damit ist } t_{n1} = 0$$

Berechne, für welche t_n die Klammer gleich null wird.

$$0 = 2t_n^2 - 39t_n + 169 \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow 0 = t_n^2 - \frac{39}{2}t_n + \frac{169}{2} \quad \text{p-q-Formel}$$

$$\begin{aligned} t_{n2/3} &= \frac{39}{4} \pm \sqrt{\left(-\frac{39}{4}\right)^2 - \frac{169}{2}} \\ &= \frac{39}{4} \pm \sqrt{\frac{1521}{16} - \frac{1352}{16}} \\ &= \frac{39}{4} \pm \sqrt{\frac{169}{16}} \\ &= \frac{39}{4} \pm \frac{13}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_{n2} = \frac{26}{4} = 6,5 \quad ; \quad t_{n3} = \frac{52}{4} = 13$$

Zwei der Kandidaten liegen am Beginn und Ende der Hochwasserwelle. Aus logischen Gründen muss also zum Zeitpunkt des mittleren Kandidaten ein Maximum und somit der Höchstwasserstand erreicht sein.

Zur Sicherheit Überprüfung der Kandidaten mit Vorzeichenwechselkriterium:

Wert vor dem ersten Kandidaten:

$$h'(-1) = \frac{5}{49} (2 \cdot (-1)^3 - 39 \cdot (-1)^2 + 169 \cdot (-1)) \approx -21,429$$

Wert zwischen dem ersten und dem zweiten Kandidaten:

$$h'(1) = \frac{5}{49} (2 \cdot 1^3 - 39 \cdot 1^2 + 169 \cdot 1) \approx +13,469$$

Wert zwischen dem zweiten und dem dritten Kandidaten:

$$h'(10) = \frac{5}{49} (2 \cdot 10^3 - 39 \cdot 10^2 + 169 \cdot 10) \approx -21,429$$

Wert nach dem dritten Kandidaten:

$$h'(14) = \frac{5}{49} (2 \cdot 14^3 - 39 \cdot 14^2 + 169 \cdot 14) \approx +21,429$$

Bei t_{n1} findet ein Vorzeichenwechsel von - nach + statt. Also liegt ein Minimum vor.

Bei t_{n2} findet ein Vorzeichenwechsel von + nach - statt. Also liegt ein Maximum vor.

Bei t_{n3} findet ein Vorzeichenwechsel von - nach + statt. Also liegt ein Minimum vor.

Also ist, wie der erwartet, der Höchstwasserstand bei t_{n2} .

Berechnung des Wasserstandes:

$$h(t_{n2}) = \frac{5}{98} \cdot 6,5^4 - \frac{65}{49} \cdot 6,5^3 + \frac{845}{98} \cdot 6,5^2 + 30 = 121,07$$

A: In der Mitte des 7. Tages war der Höchstwasserstand mit 1,21 m erreicht.

f) Berechne, zu welchem Zeitpunkt das Hochwasser am stärksten fiel. Berechne weiter, wie stark der Wasserstand zu diesem Zeitpunkt pro Tag bzw. pro Stunde fiel.

Jetzt ist das Minimum der ersten Ableitung gesucht (bzw. die Wendestelle der Ursprungsfunktion mit einem Wechsel von einer Rechts- in eine Linkskurve).

Das haben wir schon berechnet: $t_{n2} = \frac{13}{2} + \frac{13}{\sqrt{12}} \approx 10,25$ Fehlt nur noch die Stärke der Steigung.

$$h''(t_{n2}) = \frac{5}{49} (2t_{n2}^3 - 39t_{n2}^2 + 169t) = \frac{5}{49} (2t_{n2}^3 - 39t_{n2}^2 + 169t) \approx -21,57$$

A: Das Wasser fällt am stärksten nach etwa 10,25 Tagen. Es fällt um 21,57 cm pro Tag bzw. 9 mm pro Stunde.

g) Berechne, an welchem Tag die Hochwasserwelle endgültig vorüber war.

Die Hochwasserwelle ist vorbei, wenn wieder der Anfangswert vom 30 cm erreicht wird. Also werden die t_{30} -Werte gesucht, für die $h(t_n)=30$ ist.

$$30 = \frac{5}{98}t_n^4 - \frac{65}{49}t_n^3 + \frac{845}{98}t_n^2 + 30 \quad | - 30 ; \quad t_n^2 \text{ ausklammern}$$

$$0 = \frac{5}{49}t_n^2 \left(\frac{1}{2}t_n^2 - 13t_n + \frac{169}{2} \right)$$

Damit ist $t_{n1}=0$, was den Erwartungen entspricht, denn am Beginn ist ja noch kein Hochwasser.

Berechne, für welche t_n die Klammer gleich null wird.

$$0 = \frac{1}{2}t_{n2}^2 - 13t_{n2} + \frac{169}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 0 = t_{n2}^2 - 26t_{n2} + 169 \quad \text{Binomische Formel rückwärts}$$

$$\Leftrightarrow 0 = (t_{n2} - 13)^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow 0 = t_{n2} - 13 \quad | + 13$$

$$\Leftrightarrow 13 = t_{n2}$$

A: Nach dem 13. Tag war die Hochwasserwelle vorbei.