

**Aufgabe 1:** Parabeln sind keine mathematischen Spielereien, sondern sind die mathematische Grundlage vieler Naturgesetze. Der Mensch benutzt sie beispielsweise in der Architektur, da parabelförmige Bögen sehr stabil sind.

Der parabelförmige Wasserstrahl erreicht eine Höhe von 1 m. Er tritt 20 cm über der Wasseroberfläche aus der Düse und überwindet eine Strecke von 94,72 cm weiter in der Wasseroberfläche. Der höchste Punkt ist 0,5 m vom Auftreffpunkt entfernt.

*Die Parabelkirche in Gelsenkirchen wurde von dem Architekten Josef Franke in den Jahren 1927-1929 erbaut. Das Kirchenmittelschiff hat die maximale Höhe von 15 m genau in der Mitte und ist am Boden 10 m breit. (Der Fussboden ist gerade, auch wenn es hier nicht so aussieht.)*

**Wie können wir Parabeln berechnen, die auf Fotos abgebildet sind?**

Vergleiche mit den bisherigen Aufgaben zur Parabelbestimmung.

a) Welche Angaben werden allgemein benötigt, um eine Parabel zu bestimmen?

*Drei Punkte mit ihren Koordinaten, die auf dem Graphen der Funktion liegen.*

b) Was fehlt hier im Vergleich zu den vorherigen Aufgaben?

*Ein Koordinatensystem.*

c) Wie können die Informationen unter den Fotos genutzt werden?

*Aus den Längenangaben kann man Koordinaten ableiten, wenn man den Koordinatenursprung selbst festgelegt.*

d) Formuliere in Stichpunkten einen Lösungsweg, um aus den Fotos eine Parabel funktionsgleichung zu bestimmen.

*1. Geeigneten Koordinatenursprung festlegen.*

*2. Drei Punkte ablesen.*

*3. Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen aufstellen und lösen.*

**Aufgabe 2: Parabelkirche**

a) Stelle eine Funktionsgleichung auf, nach welcher das Kirchenmittelschiff der Parabelkirche hätte konstruiert werden können. Benutze die Angaben unter dem Foto.

Um drei Punkte ablesen zu können, muss ein Koordinatensystem bestimmt werden. Vier mögliche Punkte für den Koordinatenursprung sind eingezeichnet.

**Punkt A im Scheitelpunkt der Parabel:**

Dann sind die drei Punkte  $P_1(0|0)$ ,  $P_2(-5|-15)$ ,  $P_3(5|-15)$ .

Einsetzen in die Funktionsgleichung

$$f(x) = a x^2 + b x + c$$

- I.  $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
- II.  $-15 = a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + c$
- III.  $-15 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c$

- I.  $0 = c$
- II.  $-15 = 25a - 5b + c$
- III.  $-15 = 25a + 5b + c$       | II + III

IIIa.  $-30 = 50a$     | :50  
 $\Leftrightarrow -\frac{3}{5} = a$

Setze  $a = -\frac{3}{5}$  in II ein:

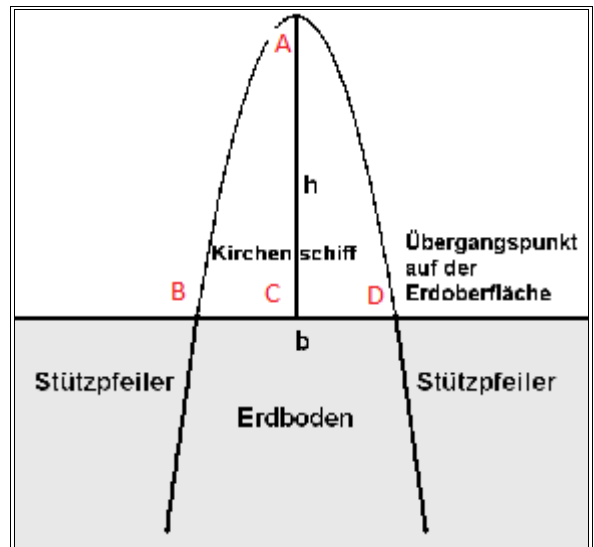
II.  $-15 = 25 \left(-\frac{3}{5}\right) - 5b + 0$     | T    ä  
 $\Leftrightarrow -15 = -15 - 5b$       | +15  
 $\Leftrightarrow 0 = -5b$                 | :(-5)  
 $\Leftrightarrow 0 = b$

Also  $a = -\frac{3}{5}$ ,  $b = 0$  und  $c = 0$ , somit  $f(x) = -\frac{3}{5} x^2$

**Punkt B:** Dann sind die drei Punkte  $P_1(0|0)$ ,  $P_2(5|15)$ ,  $P_3(10|0)$ .

Einsetzen in die Funktionsgleichung  $f(x) = a x^2 + b x + c$

- I.  $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
  - II.  $15 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c$
  - III.  $0 = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$
- I.  $0 = c$
  - II.  $15 = 25a + 5b + c$     | setze  $c = 0$  ein
  - III.  $0 = 100a + 10b + c$  | setze  $c = 0$  ein



Skizze des Kirchenschiffes

$$\text{IIa.} \quad 15 = 25a + 5b$$

$$\text{IIIa.} \quad 0 = 100a + 10b \quad | \text{ IIIa.} - 2 \text{ IIa.}$$

$$\text{IIIb.} \quad -30 = 50a \quad | :50$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{5} = a$$

$$\text{Setze } a = -\frac{3}{5} \text{ in IIIa. ein:}$$

$$\text{IIIa.} \quad 0 = 100 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 10b \quad | \cdot 7$$

$$\Leftrightarrow 0 = -60 + 10b \quad | + 60$$

$$\Leftrightarrow 60 = 10b \quad | :10$$

$$\Leftrightarrow 6 = b$$

$$\text{Also } a = -\frac{3}{5}, b = 6 \text{ und } c = 0, \text{ somit } f(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 6x$$

$$\text{Punkt C: } P_1(-5|0), P_2(0|15), P_3(5|0). \quad f(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 15$$

$$\text{Punkt D: } P_1(-10|0), P_2(-5|15), P_3(0|0). \quad f(x) = -\frac{3}{5}x^2 - 6x$$

b) Zwei Meter von der Wand entfernt hängt ein Kronleuchter an 3 Meter langen Seilen von der Decke. Berechne, in welcher Höhe der Kronleuchter hängt.

Bei allen drei Funktionsgleichungen kommt das gleiche Ergebnis heraus.

$$\text{Hier: } f(x) = -\frac{3}{5}x^2$$

2 Meter von der Wand entfernt bedeutet für dieses Koordinatensystem: 3 m vom Koordinatenursprung entfernt. Da nicht gesagt wurde, ob die Wand links oder rechts gemeint ist, können wir entweder +3 oder -3 für x einsetzen.

$$f(x_1) = -\frac{3}{5} \cdot 3^2 = -\frac{27}{5} = -5,4. \text{ Die Deckenhöhe beträgt hier also } 15 \text{ m} - 5,4 \text{ m} = 9,6 \text{ m.}$$

**A: Der Kronleuchter hängt in 9,6 m Höhe.**

**Aufgabe 3: Springbrunnen**

a) Stelle eine Funktionsgleichung auf, welche die Bahn des Wasserstrahls beschreibt. (Tipp für eine genaue Rechnung: Die 94,72 cm sind in Wirklichkeit  $(0,5 + \sqrt{0,2})$  cm gerundet.)

Am einfachsten ist es, den Koordinatenursprung in den Scheitelpunkt der Parabel zu legen. Die drei anderen Möglichkeiten (Düse, Auftreffpunkt, Mitte unter dem Scheitelpunkt) funktionieren natürlich auch. Also sind die drei Punkte  $P_1(0|0)$ ,  $P_2(-\sqrt{0,2}|-0,8)$ ,  $P_3(0,5|-1)$ .

Einsetzen in  $f(x) = ax^2 + bx + c$ :

I.  $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

II.  $-0,8 = a \cdot (-\sqrt{0,2})^2 + b \cdot (-\sqrt{0,2}) + c$

III.  $-1 = a \cdot 0,5^2 + b \cdot 0,5 + c$

I.  $0 = c$  | sofort eingesetzt

II.  $-0,8 = 0,2a - \sqrt{0,2}b$  |  $\cdot 5$

III.  $-1 = 0,25a + 0,5b$  |  $\cdot 4$

IIa.  $-4 = a - 5\sqrt{0,2}b$  | IIa. - IIIa.

IIIa.  $-4 = a - 2b$

IIb.  $0 = (-5\sqrt{2} - 2)b$  |  $:(-5\sqrt{2} - 2)$   
 $\Leftrightarrow 0 = b$

Setze  $b = 0$  in IIIa ein:

IIIa.  $-4 = a - 2 \cdot 0$

Also ist  $a = -4$ ;  $b = 0$ ;  $c = 0$  und somit  $f(x) = -4x^2$ .

b) Das Wasser wird aus dem Wasserbecken abgelassen. Berechne, in welcher Entfernung von der Düse der Wasserstrahl nun auf den Beckenboden trifft, wenn der Wasserspiegel zuvor 0,5 m betrug.

Der Strahl trifft nun 0,5 m weiter unten auf. Gesucht ist also ein Punkt  $P_4$  auf dem Graphen, dessen y-Koordinate 0,5 m unter dem alten Wasserspiegel liegt. Bei unserem Koordinatensystem mit  $(0|0)$  im Scheitelpunkt wäre das der Punkt  $P_4(x_p|-1,5)$ .

Setze  $P_4$  in  $f(x)$  ein:

$-1,5 = -4x_p^2$  |  $:(-4)$

$\Leftrightarrow \frac{3}{8} = x_p^2$  |  $\sqrt{\quad}$

$\Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{3}{8}} = x_p$ . Der Auftreffpunkt liegt rechts vom Scheitelpunkt, also ist die positive Lösung gesucht

und  $P_4$  hat die Koordinaten  $(\sqrt{6}|-1,5)$ .

Entfernung vom Scheitelpunkt bis zur Düse:  $\sqrt{0,2}$  cm Also Gesamtentfernung

$d = \sqrt{0,2} m + \sqrt{\frac{3}{8}} m \approx 1,06 m$

**A: Der Strahl trifft nun 1,06 m von der Düse entfernt auf.**