Mathematik Klasse 10a, 4. Klassenarbeit – Trigonometrie 1 – Lösung A 24.02.2011

<u>Aufgabe 1 (Exponentialfunktion):</u> *6 Punkte*

Ein rechtwinkliges Dreieck verdoppelt alle 10 min seine Fläche. Berechne, nach wie viel Minuten es seine Fläche verfünffacht hat.

1. Funktion bestimmen.

$f(t)=b\,a^t$ b: Anfangswert; a: Wachstumsfaktor

$$2b=b\,a^{T_D} \quad |:b$$
$$\Leftrightarrow 2=a^{T_D} \quad | \ \frac{1}{T_D}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[T_D]{2}=a \qquad \Rightarrow a=\sqrt[10]{2}=2^{0,1}\approx 1{,}07$$

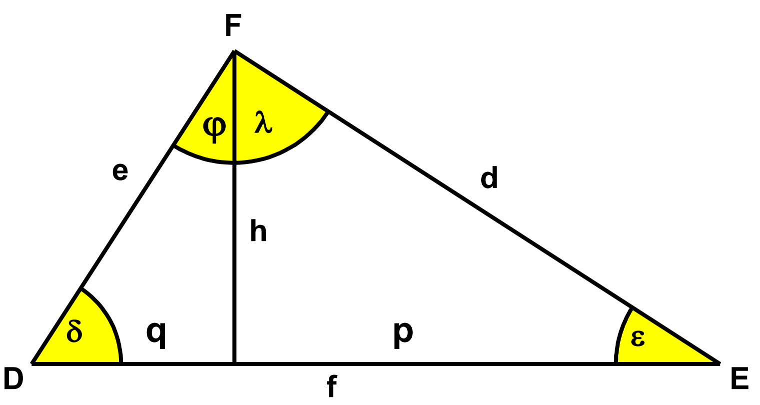
Also $f(x)=b\,2^{\frac{t}{10}}$.

t ausrechnen für Verfünffachung des Anfangswerts:

$$5\mathrm{b}=b\,2^{\frac{t_5}{10}} \quad |:b$$
$$\Leftrightarrow 5=2^{\frac{t_5}{10}} \quad |\ \lg$$
$$\Leftrightarrow lg(5)=lg\left(2^{\frac{t_5}{10}}\right)$$
$$\Leftrightarrow lg(5)=\frac{t_5}{10}lg(2) \quad | \ \cdot\frac{10}{lg(2)}$$
$$\Leftrightarrow t_5=\frac{10\cdot lg(5)}{lg(2)}\approx 23{,}22$$

A: Nach etwa 23,22 min hat sich die Fläche verfünffacht.

<u>Aufgabe 2:</u> *12 Punkte (4 + 4 + 4)*



Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck DEF mit der Hypotenuse f, den Katheten d und e, der Höhe h und den Hypotenusenabschnitten p und q.

a) $e=5\,cm;\,d=8\,cm.$ Berechne φ.

$$\tan(\delta)=\frac{d}{e}=\frac{8\,cm}{5\,cm}=\frac{8}{5}\Rightarrow\delta\approx 58{,}00°$$

$$\phi=90°-\delta\approx\mathbf{32°}$$

b) $q = 4\,cm\,;\lambda = 30\,°$. Berechne e.

$$\phi = 90\,° - \lambda = 60\,° \qquad \sin(\phi) = \frac{q}{e} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e} = \frac{q}{\sin(\phi)} = \frac{4\,cm}{\sin(60\,°)} = \frac{4\,cm}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\,cm}{\sqrt{3}} \approx \mathbf{4{,}62\,cm}$$

c) $d = 30\,cm\,;\delta = 40\,°$. Berechne h.

$$\tan(\delta) = \frac{d}{e} \quad \Leftrightarrow \quad e = \frac{d}{\tan(\delta)} = \frac{30\,cm}{\tan(40\,°)} \approx 35{,}7526\,cm$$

$$\sin(\delta) = \frac{h}{e} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{h} = e\sin(\delta) \approx 35{,}7526\,cm \cdot \sin(40\,°) = \mathbf{22{,}98\,cm}$$

<u>Aufgabe 3:</u> *8 Punkte (2 + 4 + 2)*

Ein Passagierflugzeug startet in Düsseldorf mit einem Steigwinkel, welcher einer Straßensteigung von 36,4% entspricht.

a) Berechne den Steigwinkel α des Flugzeugs.

$$\tan(\alpha) = 0{,}364 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \approx \mathbf{20{,}00\,°}$$

A: Der Steigwinkel beträgt 20°.

b) Das Flugzeug steigt 2 min lang bei einer Reisegeschwindigkeit von 100 m/s. Berechne die erreichte Flughöhe.

$2\,min = 120\,s$. Zurückgelegter Weg in der Luft: $s = 120\,s \cdot 100\,m\,s^{-1} = 12\,km$

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{h} = s \cdot \sin(\alpha) = 12\,km \cdot \sin(20\,°) \approx \mathbf{4{,}10\,km}$$

A: Das Flugzeug steigt 4,1 km hoch.

c) Berechne die während der Steigphase zurückgelegte Flugstrecke (überflogene Strecke auf dem Boden.)

$$\cos(\alpha) = \frac{f}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f} = s\cos(\alpha) = 12\,km\cos(20\,°) \approx \mathbf{11{,}28\,km}$$

A: Das Flugzeug überfliegt eine Strecke von 11,28 km.

Mathematik Klasse 10a, 4. Klassenarbeit – Trigonometrie 1 – Lösung A 24.02.2011

<u>Aufgabe 4:</u> *8 Punkte + 3 Bonuspunkte (3 + 5 + 3 BP)*

Sir Francis Drake (1540-1596) war ein englischer Freibeuter. Er liegt mit zweien seiner Schiffe vor Malta. Das eine schickt er Richtung Gibraltar, während er selbst Richtung Nordafrika aufbricht.Beide Schiffe fahren exakt geradeaus und mit exakt der gleichen Geschwindigkeit. Sie fahren in einem Winkel von 26° auseinander.

a) Beide Schiffe fahren exakt 140 Seemeilen weit. Berechne die Entfernung der beiden Schiffe zu diesem Zeitpunkt.

Sei h die gesuchte Strecke

$$\sin(13°)=\frac{\frac{h}{2}}{140\,sm} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{h}=280\,sm\cdot\sin(13°)\approx\mathbf{62{,}99}\,\boldsymbol{sm}$$

A: Sie sind ca. 63 Seemeilen voneinander entfernt.

b) Drakes Pläne ändern sich jetzt (nach 140 Seemeilen). Er muss das andere Schiff nun unbedingt erreichen. Er erhöht seine Geschwindigkeit und nachdem das andere Schiff 80 weitere Seemeilen gefahren ist, hat er es tatsächlich geschafft. Berechne, wie weit Nelson fahren musste, um das Schiff einzuholen.

Sei h_1 die senkrechte Strecke, welche das 2. Schiff während der 80 sm noch zurücklegt.

$$\sin(13°)=\frac{h_1}{80\,sm} \quad\Leftrightarrow\quad h_1=80\,sm\cdot\sin(13°)\approx 18{,}00\,sm$$

Sei s_1 die waagerechte Strecke, welche das 2. Schiff während der 80 sm noch zurücklegt.

$$\cos(13°)=\frac{s_1}{80\,sm} \quad\Leftrightarrow\quad s_1=80\,sm\cdot\cos(13°)\approx 77{,}95\,sm$$

$h_2=h+h_1=80{,}99\,sm$ ist die gesamte senkrechte Strecke, die Nelson zurücklegen muss.

Drake muss von seinem Standpunkt aus 77,95 sm waagerecht und 80,99 sm senkrecht zurücklegen. Der direkte Weg ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit diesem beiden Katheten.

Sei c die gesuchte Strecke. $c^2=s_1^2+h_2^2 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{c}=\sqrt{s_1^2+h_2^2}\approx\mathbf{112{,}40}\,\boldsymbol{sm}$

A: Drake muss etwa 112 Seemeilen zurücklegen, bis er das Schiff einholt.

c) (Bonusaufgabe) Angenommen, beide Schiffe reisten zu Beginn mit der Geschwindigkeit von 6 Knoten. Berechne die Geschwindigkeit, die Drake während seiner Verfolgung hatte.

Sei v die gesuchte Geschwindigkeit.

$$\frac{v}{6\,kn}=\frac{112{,}40\,sm}{80\,sm} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{v}=\frac{112{,}40\,sm}{80\,sm}\cdot 6\,kn=\mathbf{8{,}43}\,\boldsymbol{kn}$$

A: Drake musste seine Geschwindigkeit auf ca. 8,43 Knoten steigern.

Mathematik Klasse 10a, 4. Klassenarbeit – Trigonometrie 1 – Lösung A 24.02.2011

<u>Aufgabe 5:</u> *10 Punkte (4 + 6)*

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seiten a,b und c, sowie den Winkeln α,β und γ.

a) $b=4\,cm;\ \beta=60°;\ \alpha=75°$. Berechne a,b und γ mit Hilfe des Sinussatzes.

$$\boldsymbol{\gamma}=180°-\alpha-\beta=\mathbf{45}°$$

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{c}=b\cdot\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)}=4\,cm\cdot\frac{\sin(45°)}{\sin(60°)}\approx\mathbf{3{,}27}\,\boldsymbol{cm}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}=b\cdot\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}=4\,cm\cdot\frac{\sin(75°)}{\sin(60°)}\approx\mathbf{4{,}46}\,\boldsymbol{cm}$$

Also $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{45°};\ \boldsymbol{a}=\mathbf{4{,}46}\,\boldsymbol{cm};\ \boldsymbol{c}=\mathbf{3{,}27}\,\boldsymbol{cm}$

b) $a=3\,cm;\ b=5\,cm;\ \beta=50°$. Berechne α, γ und c mit Hilfe des Sinussatzes.

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\alpha)=\frac{a}{b}\cdot\sin(\beta)=\frac{3\,cm}{5\,cm}\cdot\sin(50°)\approx0{,}4596 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha}\approx\mathbf{27{,}36°}$$

$$\alpha_2=180°-\alpha\approx152{,}64°$$

$$\boldsymbol{\gamma}=180°-\alpha-\beta\approx\mathbf{102{,}64}°$$

$\gamma_2=180°-\alpha_2-\beta\approx-22{,}64°$ Das ist nicht möglich, also gibt es kein zweites Dreieck.

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{c}=a\cdot\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}=3\,cm\cdot\frac{\sin(102{,}64°)}{\sin(27{,}36°)}\approx\mathbf{6{,}37}\,\boldsymbol{cm}$$

Also $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{27{,}36°};\ \boldsymbol{\gamma}=\mathbf{102{,}64°};\ \boldsymbol{c}=\mathbf{1{,}41}\,\boldsymbol{cm}$