

Aufgabe 1: Das Bild rechts zeigt einen Rennfahrer auf einem Hochrad.

1.1 Diskutiere die Nachteile, die ein Hochrad gegenüber einem modernen Fahrrad insbesondere bei einem Radrennen hat, selbst wenn wir davon ausgehen, dass beide Fahrräder die gleiche Masse haben und die Vorteile einer Gangschaltung außer Acht lassen.

Um bei einem Fahrzeug mit Rädern eine Translationsbewegung (also Vorwärtsbewegung) zu erreichen, müssen die Räder gleichzeitig in Rotation versetzt werden. Bei einem großen Rad ist das Trägheitsmoment größer als bei einem kleinen Rad mit gleicher Masse, d.h. das große Rad setzt der Änderung der Rotationsbewegung mehr Widerstand entgegen. Bei gleicher Translations-Endgeschwindigkeit bedeutet dies, dass beim Hochrad mehr Rotationsenergie in den Rädern gespeichert ist, die zuvor als Arbeit verrichtet werden musste. Da das Trägheitsmoment mit dem Quadrat zum Abstand der Massen von der Rotationsachse wächst, spielt es auch keine große Rolle, wenn das kleine Rad des Hochrads kleiner als das Rad eines normalen Fahrrads ist.

1.2 Erläutere warum ein fahrendes Fahrrad ohne Fahrer zunächst nicht umkippt.

Die Räder eines fahrenden Fahrrads besitzen einen Drehimpuls. Der Drehimpuls ist eine vektorielle Erhaltungsgröße, d.h. ohne ein äußeres Drehmoment verändert sich der Drehimpuls weder in Betrag noch Richtung. Ein umkippendes Fahrrad bedeutet aber eine Richtungsänderung des Drehimpulses.

1.3. Betrachten wir ein Hochrad mit einem großen Rad mit 1,5 m Durchmesser und einer Masse von 10 kg und einem kleinen Rad mit einem Durchmesser von 30 cm und einer Masse von 1 kg. Wir nehmen an, dass die gesamte Masse jeweils in einem Ring von 2 cm am Außenrand der Räder konzentriert ist. Die Gesamtmasse des Hochrads beträgt 15 kg.

1.3.1 Berechne das Trägheitsmoment beider Räder des Hochrads.

$$J = \frac{1}{2} m (R_i^2 + R_a^2) \quad \text{Großes Rad: } J_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ kg} \left((0,73 \text{ m})^2 + (0,75 \text{ m})^2 \right) = 5,477 \text{ kg m}^2$$

$$\text{Kleines Rad: } J_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ kg} \left((0,13 \text{ m})^2 + (0,15 \text{ m})^2 \right) = 0,0197 \text{ kg m}^2$$

1.3.2 Berechne die Winkelgeschwindigkeit beider Räder bei einer Geschwindigkeit des Hochrads von 20 km/h.

Berechnung der Umlaufzeiten der Räder mit Hilfe des Umfangs:

$$U_1 = 2\pi \cdot 0,75 \text{ m} = \frac{3}{2} \pi \text{ m} = 4,7124 \text{ m} \quad \text{Um 4,7 m zurückzulegen braucht das Hochrad die Zeit:}$$

$$s_1 = U_1 = v \cdot T_1 \Leftrightarrow T_1 = \frac{U_1}{v} = \frac{\frac{3}{2} \pi \text{ m}}{\frac{20 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}} = 0,8482 \text{ s} \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{200}{27} \frac{1}{\text{s}} = 7,4074 \frac{1}{\text{s}}$$

$$U_2 = 2\pi \cdot 0,15 \text{ m} = \frac{3}{10} \pi \text{ m} = 0,9425 \text{ m} \quad \text{Um 0,94 m zurückzulegen braucht das Hochrad die Zeit:}$$

$$s_2 = U_2 = v \cdot T_2 \Leftrightarrow T_2 = \frac{U_2}{v} = \frac{\frac{3}{10} \pi \text{ m}}{\frac{20 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}} = 0,1696 \text{ s} \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{1000}{27} \frac{1}{\text{s}} = 37,0370 \frac{1}{\text{s}}$$

A: Die Winkelgeschwindigkeiten der Räder betragen 7,4 1/s und 37 1/s J.

1.3.3 Berechne die Rotationsenergie beider Räder bei 20 km/h.

$$E_{Rot} = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad \text{Großes Rad: } E_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 5,477 \text{ kg m}^2 \cdot \left(\frac{200}{27} \frac{1}{s} \right)^2 = 150,2603 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \mathbf{150 \text{ J}}$$

$$\text{Kleines Rad: } E_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,0197 \text{ kg m}^2 \cdot \left(\frac{1000}{27} \frac{1}{s} \right)^2 = 13,5117 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \mathbf{14 \text{ J}}$$

A: Die Rotationsenergien der Räder betragen 150 J und 14 J.

1.3.4 Berechne die Gesamt-Bewegungsenergie des Hochrads bei 20 km/h.

$$\text{Translationsenergie: } E_T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 15 \text{ kg} \cdot \left(\frac{20}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = \frac{6250}{27} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 231,4815 \text{ J}$$

$$E_{Kin} = E_{Rot} + E_T = 150 \text{ J} + 14 \text{ J} + 231 \text{ J} = \mathbf{395 \text{ J}}$$

Tatsächlich steckt mehr als 40% der aufgewendeten Arbeit, um das Hochrad auf 20 km/h zu bringen, in der Rotationsenergie, die nichts zur Fortbewegung beiträgt.

A: Die Gesamtenergie des Hochrads beträgt 395 J.

1.3.5 Berechne die Geschwindigkeit eines modernen Fahrrads mit zwei Rädern mit je 70 cm Durchmesser und je 1,5 kg Masse und einer Gesamtmasse von ebenfalls 15 kg, dass die gleiche Gesamt-Bewegungsenergie wie das Hochrad bei 20 km/h hat. (Masse der Räder wieder komplett in einem Ring von 2 cm Breite).

$$\text{Gesamtenergie: } E_{Kin} = E_{Rot} + E_T = 2 \cdot \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{T_3} = \frac{2\pi}{\frac{U_3}{v}} = \frac{2\pi}{2\pi r_3} = \frac{v}{r_3} \quad \text{Damit } E_{Kin} = 2 \cdot \frac{1}{2} J_3 \frac{v^2}{r_3^2} + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} v^2 \cdot \left(\frac{2J_3}{r_3^2} + m \right)$$

$$\Leftrightarrow v^2 = \frac{2E_{Kin}}{\frac{2J_3}{r_3^2} + m} \Leftrightarrow v = \pm \sqrt{\frac{2E_{Kin}}{\frac{2J_3}{r_3^2} + m}} \quad \text{Negative Lösung ist unplausibel.}$$

$$\text{Trägheitsmoment eines Rades: } J_3 = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \text{ kg} \left((0,33 \text{ m})^2 + (0,35 \text{ m})^2 \right) = 0,17355 \text{ kg m}^2$$

$$\text{Also } v = \sqrt{\frac{2 E_{kin}}{\frac{2 J_3}{r_3} + m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 395 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 0,17355 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} + 15 \text{ kg}}} = 6,6557 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 23,96 \text{ km/h}$$

A: Das normale Fahrrad ist mit 24 km/h mehr als 20% schneller als das Hochrad, obwohl die gleiche Arbeit aufgewendet muss.