

Aufgabe 1: Empire State Building

Das Empire State Building war mit 381 Metern (441 Meter bis zur Spitze der Antenne) für kurze Zeit das höchste Gebäude der Welt. 73 Aufzüge sorgen für die schnelle Erreichbarkeit der höheren Stockwerke. Die Aufsichtsplattform im 102. Stock auf 370 m Höhe ist über Expressaufzüge verbunden, die 27 m/s schnell sind.

Wir betrachten nun folgendes Szenario:

1. Ein Expressaufzug fährt vom Erdgeschoss (0 m) auf die Aufsichtsplattform. (Wir vernachlässigen die Beschleunigung beim Starten und Bremsen und nehmen an, dass die Geschwindigkeit konstant ist).
2. Die Sicherheitsseile reißen. (Zum Glück ist der Aufzug nun leer. Außerdem passiert so etwas nie.)
3. Nach 10 m freier Fall greifen die Sicherheitsbremsen (in Wirklichkeit passiert das nach einigen Zentimetern) und bringen den Aufzug innerhalb von 30 cm zum Stehen. (Die Beschleunigung beim Bremsen wird als konstant angenommen).

1.1 Berechne, wie lange es dauert, bis ein Expressaufzug vom Erdgeschoss bis zur Aufsichtsplattform fährt.

$$s = v \cdot t \Leftrightarrow t_0 = \frac{v}{s} = \frac{370 \text{ m}}{27 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 13,70 \text{ s}$$

A: Der Aufzug benötigt weniger als 14 Sekunden.

1.2 Berechne die Geschwindigkeit, die der Aufzug hat, wenn die Sicherheitsbremsen greifen.

Freier Fall: $s = \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2s}{g} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1,4278 \text{ s}$

$$v_1 = g \cdot t_1 = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,4278 \text{ s} = 14,01 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A: Die Geschwindigkeit nach dem freien Fall beträgt 14 Meter pro Sekunde.

1.3 Berechne die Zeit, die es braucht, bis die Sicherheitsbremsen den Aufzug zum Stehen bringen.

$$\Delta v = a \cdot t \Leftrightarrow a = \frac{\Delta v}{t} \text{ Einsetzen in } s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta v}{t} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \Delta v t \Leftrightarrow t = \frac{2s}{\Delta v} = \frac{2 \cdot 0,3 \text{ m}}{14,01 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,043 \text{ s}$$

A: Der Aufzug steht innerhalb von 43 ms.

1.4 Stelle für alle drei Bewegungen Bewegungsgleichungen s(t) auf, wobei $s_0 = 0 \text{ m}$ das Erdgeschoss darstellen soll. ($t = 0$ ist jeweils den Start der Bewegung).

1. $s_1(t) = v \cdot t = 27 \frac{m}{s} \cdot t$
2. $s_2(t) = -g t + s_0 = -g t + 370 m$
3. $s_3(t) = -a t + s_1 = -a t + 360 m$

Aufgabe 2: Voyager 1

Die Raumsonde Voyager 1 startete am 05.09.1977 auf einer Mission zur Erkundung des Sonnensystem. Mittlerweile ist die Sonde 18,74 Milliarden Kilometer entfernt und hat als erstes von Menschen gebautes Objekt das Sonnensystem verlassen, eine Entfernung, für die das Licht 17 Stunden und 22 Minuten benötigt. Jährlich nimmt diese Entfernung um 540 Millionen Kilometer zu.

2.1 Berechne die Geschwindigkeit der antriebslosen Sonde in km/h.

$$v = \frac{540 \text{ Millionen Kilometer}}{1 \text{ Jahr}} = \frac{540 \cdot 10^6 \text{ km}}{365,25 \cdot 24 \text{ h}} = \frac{5,4 \cdot 10^8 \text{ km}}{8766 \text{ h}} = \mathbf{61601,64 \text{ km/h}} = 17111,6 \frac{m}{s}$$

A: Die Sonde ist über 61.000 km/h schnell.

2.2 Berechne, wie lange es dauert, bis die Sonde den nächsten Stern erreicht. (Entfernung: 4,2 Lichtjahre (die Entfernung, die das Licht in einem Jahr zurückgelegt).

$$1 \text{ Lichtjahr} = 1 \text{ ly} = 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 1 a = 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 9,4610 \cdot 10^{15} m$$

$$s = v \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{4,2 \cdot 9,4610 \cdot 10^{15} m}{17111,6 \frac{m}{s}} = 2,3216 \cdot 10^{13} s = \mathbf{735664,99 a}$$

A: Die Sonde bräuchte fast 736.000 Jahre.

2.3 Die Relativitätstheorie zeigt, dass kein Körper mit einer Ruhemasse die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann. Wir ignorieren mal diese Erkenntnis und berechnen die Bewegungen rein klassisch.

Berechne die Zeit ab Start, die Voyager 1 mit konstant $a_0 = 1 g = 9,81 m s^{-2}$ beschleunigen müsste, um die Lichtgeschwindigkeit zu erreichen.

$$v = a \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{9,81 \frac{m}{s^2}} = 3,06 \cdot 10^7 s = \mathbf{353,71 d}$$

A: Es würde weniger als ein Jahr dauern.

Aufgabe 3: Kirschkernspucken

Wettbewerb im Kirschkernspucken.

3.1 Kandidat Heinrich schwört auf die "Horizontalspuckmethode", d.h. er schießt den Stein waagrecht zum Boden ab. Heinrichs Mund befindet sich in 1,70 m Höhe.

Ergebnis: Der Stein prallt in 10 m Entfernung auf.

Zeige, dass die Geschwindigkeit des Steins beim Abschuss rund 16,99 m/s beträgt.

Berechnung der Zeit: Zeit für den freien Fall aus 1,7 m Höhe.

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2s}{g} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,7 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0,5887 \text{ s}$$

Für 10 m braucht der Stein also 0,59 s. Das bedeutet für die Geschwindigkeit:

$$v_1 = \frac{s}{t} = \frac{10 \text{ m}}{0,5887 \text{ s}} = 16,9862 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A: Die Abschussgeschwindigkeit von Heinrich beträgt tatsächlich 16,99 m/s.

3.2 Kandidatin Else nutzt die "Lotrechtspuckmethode", d.h. sie schießt den Stein senkrecht nach oben. Sie erreicht 80% der Abschussgeschwindigkeit von Heinrich und ihr Mund befindet sich in 1,50 m Höhe.

Berechne, welche Strecke Elses Stein insgesamt zurücklegt. Warum wird Else trotzdem Letzte?

$$v_2 = v_1 \cdot 0,8 = 16,9862 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,8 = 13,5890 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Senkrechter Wurf nach oben: Freier Fall mit Startgeschwindigkeit.

$$v(t) = -g \cdot t + v_2 \Leftrightarrow \frac{v(t) - v_2}{-g} = t$$

Suche Zeit beim Umkehrpunkt, d.h. momentane Geschwindigkeit ist null. Damit:

$$\frac{0 - v_2}{-g} = t_0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{v_2}{g} = \frac{13,59 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1,3852 \text{ s}$$

$$s(t_0) = -\frac{1}{2} g t_0^2 + v_2 \cdot t_0 = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,3852^2 \text{ s}^2 + 13,5890 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,3852 \text{ s} = 9,4119 \text{ m}$$

Da der Stein wieder runterfällt, legt er insgesamt die Strecke $18,82 \text{ m} + 1,5 \text{ m} = 20,32 \text{ m}$ zurück.

A: Elses Stein legt zwar über 20 m zurück, allerdings beträgt die entscheidende horizontale Strecke 0 m.

3.3 Cleopatra ist der aktuelle Champion. Sie schießt den Stein mit der gleichen Geschwindigkeit wie Else ab und hat auch die gleiche Körpergröße, macht dies aber mit dem optimalen Abschusswinkel.

Berechne die Entfernung, die Cleo erreicht.

Schräger Wurf mit Abschusswinkel von 45° und der Startgeschwindigkeit $v_2 = 13,5890 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

allerdings liegt der Landepunkt 1,50 m unterhalb des Abschusspunktes.

Zwei Lösungsansätze: 1. Berechne Scheitelpunkt und behandle den Rest des Wurfes als waagerechten Wurf mit angepasster Starthöhe.

$$x_s = \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\alpha) = \frac{13,5890^2 m^2 s^{-2}}{2 \cdot 9,81 m s^{-2}} \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ) = 9,4119 m$$

$$y_s = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin^2(\alpha) = \frac{13,5890^2 m^2 s^{-2}}{2 \cdot 9,81 m s^{-2}} \cdot \sin^2(45^\circ) = 4,7059 m$$

Berechnung der waagerechten Geschwindigkeitskomponente:

$$v_x = v_0 \cdot \cos(\alpha) = 13,5890 m s^{-1} \cdot \cos(45^\circ) = 9,6089 m s^{-1}$$

Ab jetzt waagerechter Wurf mit Starthöhe $h = 1,5 m + 4,7059 m = 6,259 m$ und Geschwindigkeit $v_x = 9,6089 m s^{-1}$

Berechnung der Zeit: Zeit für den freien Fall aus 6,2 m Höhe.

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2s}{g} \Rightarrow t_3 = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,259 m}{9,81 \frac{m}{s^2}}} = 1,1296 s$$

$$s(t_3) = v \cdot t = 9,6089 m s^{-1} \cdot 1,1296 s = 10,8544 m$$

Gesamtstrecke: $10,8544 m + 9,4119 m = 20,2663$

Methode 2: Gleichung für die Bahnkurve nehmen und für $s_y = -1,5 m$ nach s_x auflösen:

$s_y = -\frac{g}{2 \cos^2(\alpha) v_0^2} s_x^2 + \tan(\alpha) s_x$ $\Leftrightarrow -1,5 m = -\frac{g}{2 \cos^2(45^\circ) v_0^2} s_x^2 + \tan(45^\circ) s_x$ $\Leftrightarrow -1,5 m = -\frac{g}{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 v_0^2} s_x^2 + 1 \cdot s_x$ $\Leftrightarrow -1,5 m = -\frac{g}{v_0^2} s_x^2 + s_x$ $\Leftrightarrow -\frac{g}{v_0^2} s_x^2 + s_x + 1,5 = 0$	$\Leftrightarrow s_x^2 - \frac{v_0^2}{g} s_x - \frac{v_0^2}{g} \cdot 1,5 = 0$ $\Rightarrow s_{x 2} = \frac{v_0^2}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2 + \frac{1,5 v_0^2}{2g}}$ $= \frac{13,59^2 m^2 s^{-2}}{2 \cdot 9,81 m s^{-2}} \pm \sqrt{\frac{13,59^4 m^4 s^{-4}}{4 \cdot 9,81^2 m^2 s^{-4}} + \frac{1,5 \cdot 13,59^2 m^2}{9,81 m s^{-2}}}$ $= 9,4118 m \pm \sqrt{116,8177 m^2}$ $= 9,4118 m \pm 10,8082 m$ $\Rightarrow s_x = 20,22 m$ <p>Die andere Lösung ist negativ und physikalisch unplausibel.</p>
---	---

A: Cleo schafft mehr als 20 m und sollte damit Champion bleiben.

Aufgabe 4: Mars

Der Mars ist 227,99 Millionen Kilometer von der Sonne entfernt und bewegt sich auf einen annähernden Kreisbahn um die Sonne. Ein Marsjahr dauert 687 Erdentage. Seine Masse beträgt $6,419 \cdot 10^{23} kg$.

4.1 Berechne die Bahngeschwindigkeit (in km/s) und die Winkelgeschwindigkeit (in 1/s) des Mars beim Umlauf um die Sonne.

Umfang der Marsbahn: $U = 2\pi \cdot 227,99 \cdot 10^6 \text{ km} = 1,4325 \cdot 10^9 \text{ km}$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1,4325 \cdot 10^9 \text{ km}}{687 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = 24,1338 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{24,1338 \text{ km s}^{-1}}{227,99 \cdot 10^6 \text{ km}} = 1,0585 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{s}}$$

A: Die Bahngeschwindigkeit beträgt rund 24 km/s und die Winkeleinheit $1,06 \cdot 10^{-7} 1/s$.

4.2 Berechne die Entfernung, die der Mars zurücklegt, wenn er beim Umlauf um die Sonne einen Winkel von 1° überstreicht.

$$s = U \cdot \frac{1^\circ}{360^\circ} = \frac{1,4325 \cdot 10^9 \text{ km}}{360} = 3,979 \cdot 10^6 \text{ km}$$

A: Der Mars überstreicht eine Strecke von rund 4 Millionen Kilometer.

4.3 Berechne die Anziehungskraft der Sonne auf der Marsbahn.

Die Anziehungskraft ist die Zentripetalkraft der Kreisbewegung, also

$$F = m\omega^2 r = 6,419 \cdot 10^{23} \text{ kg} \cdot (1,0585 \cdot 10^{-7})^2 \text{ s}^{-2} \cdot 2,2799 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1,6397 \cdot 10^{21} \text{ kg m s}^{-2} = 1,6397 \cdot 10^{21} \text{ N}$$

A: Die Anziehungskraft der Sonne auf den Mars beträgt $1,6 \cdot 10^{21} \text{ N}$.