Physik LK 11, 3. Klausur – Schwingungen und Wellen – Lösung 09.05.2012

Die Rechnungen bitte vollständig angeben und die Einheiten mitrechnen. Antwortsätze schreiben. Die Reibung ist bei allen Aufgaben zu vernachlässigen, wenn nicht explizit anders verlangt. Besondere Näherungen bitte angeben. Angegebene Kontrolllösungen dürfen nicht zur Lösung der Aufgabe benutzt werden!

Näherungen: Fadenpendel werden als mathematische Pendel betrachtet.

<u>Aufgabe 1:</u> Schwingung

Ein kleines Mädchen hat gelernt alleine zu schaukeln. Intuitiv schwingt sie alle 2,5 s (genauer Wert: 2,497532876 s) ihre Beine und Oberkörper und bringt die Schaukel in Schwingung.

<u>1.1.</u> Die folgenden Teilaufgaben behandeln die Frage: Wieso beginnt die Schaukel zu schwingen?

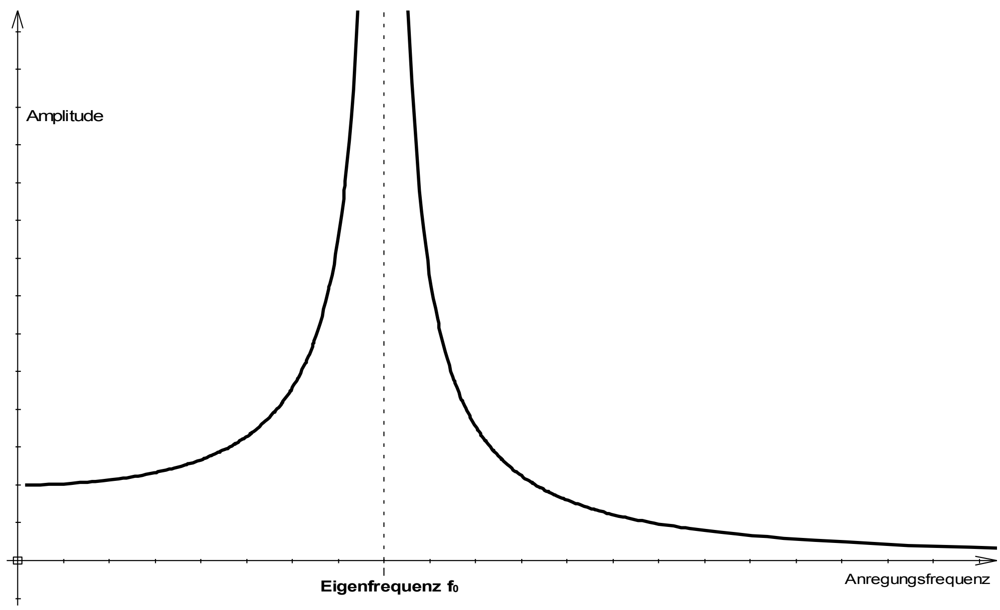
<u>1.1.1</u> Benenne und erkläre den zugrundeliegenden physikalischen Effekt. Erkläre auch, welche Rolle die Dämpfung dabei spielt.

Effekt: Resonanz
Stichpunkte: Erzwungene/angeregte Schwingung, Eigenfrequenz, Resonanzfall, ggf. Resonanzkatastrophe
Dämpfung: Frequenz für Resonanzfall verschoben, Amplitude endlich

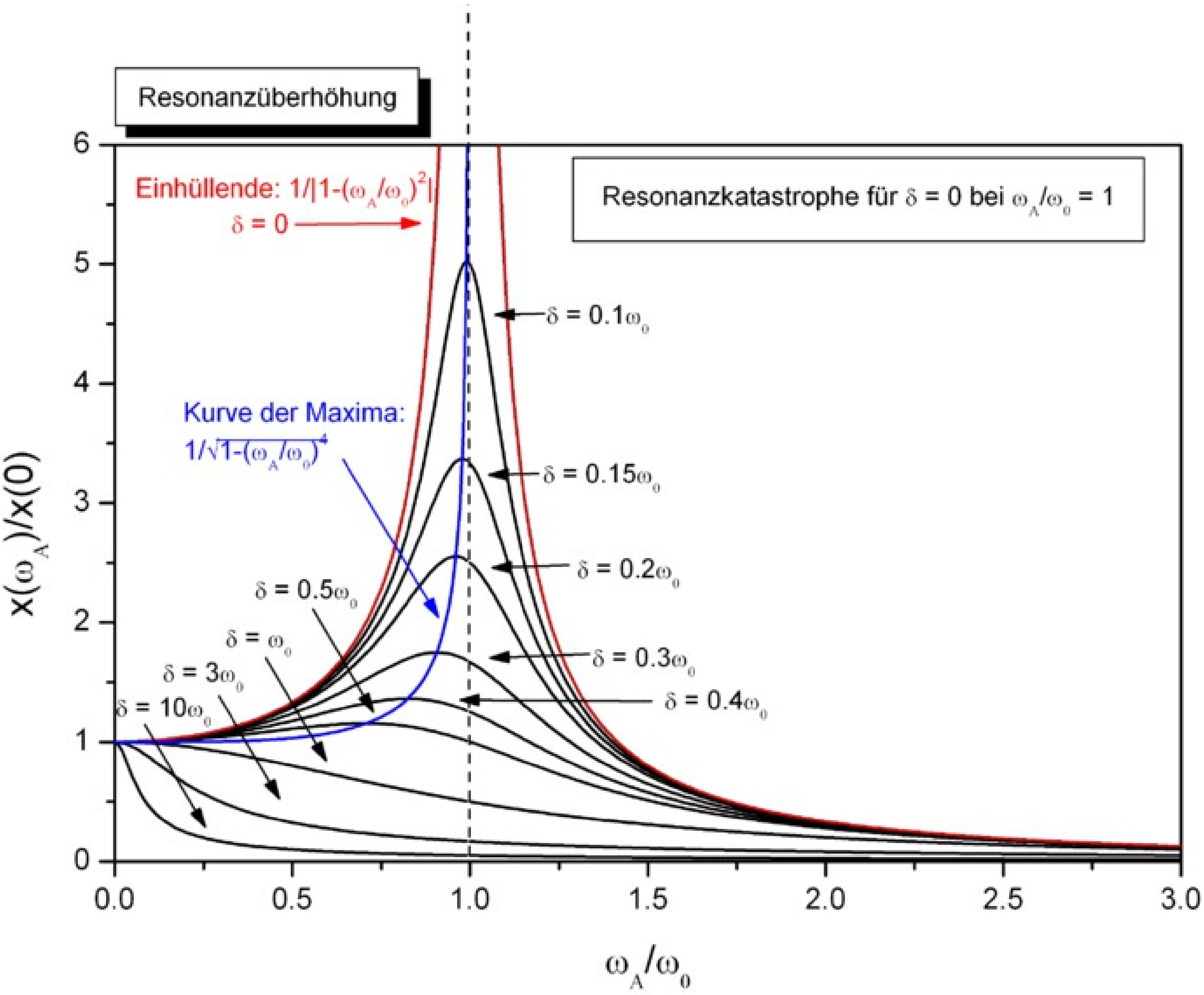
<u>1.1.2</u> Beschreibe, was passiert, wenn das Mädchen ihre Beine langsamer oder schneller schwingt.

Die maximale Amplitude wird geringer.

<u>1.1.3.</u> Skizziere ein allgemeines Diagramm, das die Ergebnisse aus Aufgabe 1.1.2 visualisiert. Beschrifte die Koordinatenachsen.



oder



1.2 Berechne die Länge der Halteseile der Schaukel ohne Berücksichtigung von Dämpfung.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{l} = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} = \frac{(2{,}497532876\,s)^2 \cdot 9{,}81\,m\,s^{-2}}{4\pi^2} = \mathbf{1{,}55}\,\boldsymbol{m}$$

A: Die Halteseile sind 1,55 m lang.

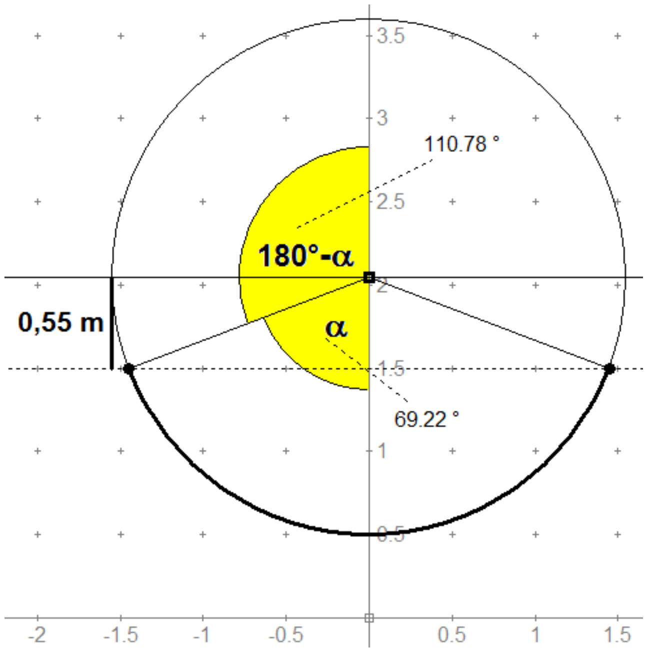
1.3 Erkläre, warum es bei einer Schaukel mit Halteseilen praktisch nicht möglich ist, ohne fremde Hilfe einen Überschlag zu machen.

Am Umkehrpunkt ist die Geschwindigkeit null. Fällt der Umkehrpunkt in den Winkelbereich von 90°-270° (Ruhelage: 0°), folgt die Schaukel nicht mehr dem Kreisbogen sondern fällt senkrecht herunter, bis sie den Kreisbogen unten wieder trifft. Die Person auf der Schaukel müsste mit einem Schlag soviel Energie hinzufügen, dass der sich Umkehrpunkt schlagartig von <90° auf >270° ändert.

<u>1.4.</u> Die Sitzbank der Schaukel in Ruhelage befindet sich in 50 cm Höhe. Die Länge der Halteseile sei 1,55 m. Das Mädchen (Masse 15 kg) schaukelt, bis die Sitzbank die Höhe von 1,5 m erreicht. Anschließend treibt sie die Schaukel nicht mehr an. In der folgenden Schwingung erreicht die Schaukel nur noch die Höhe von 1,45 m.

<u>1.4.1.</u> Berechne unter Berücksichtigung der beschriebenen Dämpfung mit welcher Periode das Mädchen seine Beine schwingen muss, um die Schaukel optimal anzutreiben.
(Kontroll-Zwischenergebnisse: $\hat{y}_1 = 1{,}872484911\,m\,;\ \hat{y}_2 = 1{,}763995778\,m\,;\ \gamma = 0{,}04779286\,s^{-1}$)

Berechnung der Dämpfung:
Auslenkung ist Länge des Kreisbogens.
Sei α der Winkel der Seile zur Ruhelage (bzw. φ im Bogenmaß).



Erste Amplitude:

$$-0{,}55 = 1{,}55 \cdot \cos(180° - \alpha_1)$$
$$\Leftrightarrow \cos(180° - \alpha_1) = \frac{-0{,}55\,m}{1{,}55\,m} = -\frac{11}{31}$$
$$\Rightarrow 180° - \alpha_1 = 110{,}78° \Leftrightarrow \alpha_1 = 69{,}22°$$
$$\phi_1 = 1{,}2081$$
$$\hat{y}_1 = \phi \cdot r = 1{,}2081 \cdot 1{,}55\,m = 1{,}872484911\,m$$

Amplitude der Folgeschwingung:

$$-0{,}65 = 1{,}55 \cdot \cos(180° - \alpha_2)$$
$$\Leftrightarrow \cos(180° - \alpha_2) = \frac{-0{,}65\,m}{1{,}55\,m} = -\frac{13}{31}$$
$$\Rightarrow 180° - \alpha_2 = 114{,}79° \Leftrightarrow \alpha_2 = 65{,}21°$$
$$\phi_2 = 1{,}1381$$
$$\hat{y}_2 = \phi \cdot r = 1{,}1381 \cdot 1{,}55\,m = 1{,}763995778\,m$$

Damit ist $\Lambda = \ln\left(\frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_2}\right) = \ln(1{,}0615) = 0{,}059684813$

Eigenfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}497532876\,s} = 2{,}515756796\,s^{-1}$

$$\Lambda = \frac{\gamma\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} \quad |\ ^2 \quad \Rightarrow \quad \Lambda^2 = \frac{\gamma^2\pi^2}{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad |\ \cdot\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^2 \cdot \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right) = \gamma^2\pi^2 \quad |\ T$$

$$\Leftrightarrow \Lambda^2\omega_0^2 - \Lambda^2\frac{\gamma^2}{4} = \gamma^2\pi^2 \quad |\ +\Lambda^2\frac{\gamma^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^2\omega_0^2 = \pi^2\gamma^2 + \frac{\Lambda^2}{4}\gamma^2 \quad |\ T$$

$$\Leftrightarrow \Lambda^2\omega_0^2 = \gamma^2\left(\pi^2 + \frac{\Lambda^2}{4}\right) \quad |\ :\left(\pi^2 + \frac{\Lambda^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{\Lambda^2 \omega_0^2}{\left(\pi^2 + \frac{\Lambda^2}{4}\right)} \quad \text{Zahlen einsetzen} \quad \gamma^2 = \frac{0{,}060^2 \left(2{,}516\, s^{-1}\right)^2}{\left(\pi^2 + \frac{0{,}060^2}{4}\right)} \approx 2{,}284157532 \cdot 10^{-3}\, s^{-2} \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \gamma = 0{,}04779286\, s^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \sqrt{2{,}515756796\, s^{-1} - \frac{\left(0{,}04779286\, s^{-1}\right)^2}{4}} = 2{,}515643301\, s$$

A: Für den optimalen Antrieb muss die Frequenz 2,516 s betragen.

<u>1.4.2.</u> Berechne, nach welcher Zeit die Schaukel zum Stillstand kommt (Amplitude < 0,02 m).

Da es nur um die Amplitude geht, wird nur die einhüllende Funktion betrachtet:

$$\hat{y}(t_1) = \hat{y}_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t_1} \quad | \ \ln \quad \Leftrightarrow \ln(0{,}02\, m) = \ln(\hat{y}_0) - \frac{\gamma}{2} t_1$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}02\, m) = \ln(\hat{y}_0) - \frac{\gamma}{2} t_1$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}02) + \ln(m) = \ln(1{,}872484911) + \ln(m) - \frac{\gamma}{2} t_1 \quad | \ -\ln(m) - \ln(1{,}872484911)$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}02) - \ln(1{,}872484911) = -\frac{\gamma}{2} t_1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{0{,}02}{1{,}872484911}\right) = -\frac{\gamma}{2} t_1 \quad | \ :\left(-\frac{\gamma}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{\gamma} \cdot \ln\left(\frac{0{,}02}{1{,}872484911}\right) = t_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\gamma \cdot 4{,}539289384} = t_1$$

$$\Leftrightarrow t_1 \approx 189{,}96\, s$$

A: Nach etwa 190 s kommt die Schwingung zum Erliegen.

<u>Aufgabe 2:</u> Welle

Ein Polizeiauto hängt in 1 m Höhe an einem Seil mit der Länge 20 m. Die defekte Sirene sendet nur einen einzelnen harmonischen Ton mit der Frequenz 880 Hz und ist im Dauerbetrieb. Die Wellenlänge des Tons beträgt 3/11 m.

2.1 Berechne die Schallgeschwindigkeit.

$$c = \nu \lambda = 880\, s^{-1} \cdot 3/11\, m = 240\, m\, s^{-1}$$

A: Die Schallgeschwindigkeit beträgt 240 m/s.

2.2 Das Auto wird angestoßen. Ein Beobachter hört nun einen sich verändernden Ton, dessen minimale Frequenz 850 Hz beträgt. Berechne die Höhe, welche das Auto erreicht.

Das Auto beginnt zu schwingen. Der Dopplereffekt mit bewegtem Sender tritt auf. Bei der angegebenen Frequenzen bewegt sich das Auto gerade durch die Ruhelage (größte Geschwindigkeit) vom Empfänger weg.

$f_E = 850\,Hz\,;\, f = 880\,Hz\,;\, v_p = 240\,m/s$

$$f_E = \frac{f}{1+\frac{u}{v_p}} \quad \Big|\cdot\left(\frac{1+\frac{u}{v_p}}{f_E}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1+\frac{u}{v_p} = \frac{f}{f_E} \quad \big|\,-1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{u}{v_p} = \frac{f}{f_E} - 1 \quad \big|\cdot v_p$$

$$u = v_p \cdot \left(\frac{f}{f_E} - 1\right) = 240\,m\,s^{-1} \cdot \left(\frac{880\,Hz}{850\,Hz} - 1\right) = 8{,}470588236\,m\,s^{-1}$$

Die Geschwindigkeit beim Durchgang durch die Ruhelage beträgt also etwa 8,5 m/s.

Am Umkehrpunkt ist die maximale Höhe erreicht. Die komplette kinetische Energie ist in potentielle Energie umgewandelt.

$$\frac{1}{2} m u^2 = m\,g\,h \;\Rightarrow\; h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(8{,}47\,m\,s^{-1})^2}{2 \cdot 9{,}81\,m\,s^{-2}} = 3{,}657\,m$$

A: Das Auto erreicht eine Höhe von 3,66 m.