Physik LK 11, 2. Kl. – Gravitation, Rotation, Schwingungen – N - Lösung 27.03.2012

Die Rechnungen bitte vollständig angeben und die Einheiten mitrechnen. Antwortsätze schreiben. Die Reibung ist bei allen Aufgaben zu vernachlässigen, wenn nicht explizit anders verlangt. Besondere Näherungen bitte angeben.

Konstanten und Formeln:

Konstante	*Wert*	*Physikalische Größe*	*Formel*
Gravitationskonstante	$\gamma=6{,}674\cdot10^{-11}\,N\,m^2\,kg^{-2}$	*Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit Innenradius R_i und Außenradius R_a*	$J=\frac{1}{2}m\left(R_i^2+R_a^2\right)$
Masse Erde	$m_E=5{,}974\cdot10^{24}\,kg$		
mittlerer Erdradius	$r_E=6.378\,km$		

Aufgabe 1: Space Odyssey

Das Bild rechts zeigt die Raumstation aus Stanley Kubricks berühmten Film „2001 – Odyssee im Weltraum" aus dem Jahre 1968. Die Raumstation kreist auf einer stabilen Bahn um die Erde und rotiert außerdem um ihre Mittelachse.

Daten:
- Durchmesser der Station: $d_a=560\,m$
- Höhe der Umlaufbahn über der Erdoberfläche: $h=320\,km$
- Masse der Raumstation: $m_S=4{,}55\cdot10^8\,kg$
- Homogene Massenverteilung
- Masse ist komplett in den äußeren Ringen
- Innendurchmesser der Raumstation: $d_i=460\,m$

1.1 Die alte Umlaufbahn befand sich in 320 km Höhe über der Erdoberfläche. Nun soll die Station so über dem Äquator platziert werden, dass sie von der Erde aus betrachtet immer an der gleichen Stelle steht.

Zeige, dass die neue Höhe der Station über der Erdoberfläche etwa 36.000 km betragen muss und die Bahngeschwindigkeit etwa 3,1 km/s beträgt.

Lösung: Damit die Station scheinbar über der Erde steht, muss ihre Umlaufzeit 24 h betragen.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{86400\,s}=7{,}27\cdot10^{-5}\,s^{-1}$$

Ansatz: Fallbeschleunigung gleich Zentripetalbeschleunigung

$$G^x\,km=\omega^2 r \;\Leftrightarrow\; G^x_{320\mathrm{km}}=\frac{4\pi^2}{T^2}r \;\Leftrightarrow\; T^2=4\pi^2\frac{r}{G^x_{320\mathrm{km}}} \;\Rightarrow\; T=2\pi\sqrt{\frac{r}{G^x_{320\mathrm{km}}}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{6{,}3675\cdot10^6\,m}{8{,}91505}\,m\,s^{-2}}=2\pi\sqrt{714241{,}6476\,s^2}=5310{,}10\,s=88\,min\,30\,s$$

$$1\,d=24\cdot60\,min=24\cdot60\cdot60\,s=86400\,s$$

$$n = \frac{5310\,s}{86400\,s} = \mathbf{16{,}27}$$

A: Die Raumstation schafft pro Tag etwas mehr als 16 Umkreisungen der Erde.

1.2 Erkläre die Begriffe: „1. kosmische Geschwindigkeit“ und „2. kosmische Geschwindigkeit“.

1.3 Bearbeite eine der beiden folgenden Aufgaben:

- Berechne die 1. kosmische Geschwindigkeit für die Erde

oder

- Berechne die 2. kosmische Geschwindigkeit für die Erde

1.4 Normalerweise rotiert die Station so schnell, dass im Inneren eine „künstliche Schwerkraft“ spürbar ist, die einem Sechstel der Erdschwerkraft auf der Erdoberfläche entspricht. Nun soll die Rotation so verändert werden, dass diese „künstliche Schwerkraft“ genau der Erdschwerkraft entspricht.

Berechne die Umlaufzeit der Raumstation um ihre eigene Achse für die neue „künstliche Schwerkraft“ von 1g.

1.5 Erkläre die Begriffe: „Trägheitsmoment“, „Drehmoment“ und „Drehimpuls“. Stelle eine oder mehrere Formeln auf, die diese Größen in Zusammenhang setzen.

Aufgabe 2: Pendeluhr

Das Bild rechts zeigt eine Pendeluhr. Das Pendel dient als Taktgeber für das Uhrwerk. Reibungsverluste der Pendelschwingung werden durch die potentielle Energie der Gewichte ausgeglichen.

Näherung: Wir betrachten das Pendel als mathematisches Pendel. Die Masse am Ende betrage 200 g.

Ungedämpfter Fall: Die Gewichte gleichen die Reibungsverluste aus.

2.1 Die Periodendauer des Pendels soll exakt $T_0 = 2\,s$ betragen. Berechne die entsprechenden Konstruktionsmaße für das Pendel.

2.2 Die Gewichte halten das Pendel bei einer konstanten Amplitude von $\hat{y} = 10\,cm.$ Berechne die Geschwindigkeit des Massenstücks am Pendelende beim Durchgang durch die Ruhelage.

Gedämpfter Fall: Die Gewichte sind nach unten gelaufen und die Reibungsverluste können nicht mehr ausgeglichen werden.

2.3 Erkläre, was das charakteristische Polynom bei einer gedämpften Schwingung ist, und wie sich daraus die verschiedenen Schwingungsfälle ergeben. Erläutere die Fälle kurz mit Hilfe eines Diagramms.

2.4 Innerhalb von $t_1 = 10\,s$ kommt die Schwingung zum Erliegen, d.h. die Amplitude ist

$\hat{y}(t_1) < 1\text{mm}.$ Zeige, dass die Dämpfung $\gamma = xxx\, s^{-1}$ beträgt.

$$\hat{y}(0\,s) = y_0 = 10\,cm \;\; ; \;\; \hat{y}(10\,s) = 0{,}1\,cm \Rightarrow \frac{\hat{y}(10\,s)}{\hat{y}(0\,s)} = \frac{0{,}1\,cm}{10\,cm} = 0{,}01 = 1\,\%$$

Betrachte immer nur den Vollausschlag. Die Gleichung für die jeweils maximale Auslenkung lautet dann:

$$\hat{y}(10\,s) = \hat{y}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}10\,s} \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}1\,cm = 10\,cm \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t_1} \quad | \;:10\,cm$$

$$\Leftrightarrow 0{,}01 = e^{-\frac{\gamma}{2}\cdot 10\,s} \quad | \;\ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}01) = -\frac{\gamma}{2}10\,s \quad | \;:(-5\,s)$$

$$\Leftrightarrow -0{,}2\,s^{-1}\cdot\ln(0{,}01) = \gamma$$

$$\Leftrightarrow \gamma = 0{,}9210\,s^{-1}$$

A: Die Dämpfung beträgt $\mathbf{0{,}92\,s^{-1}}$.

<u>**2.5**</u> Berechne die Periodendauer der gedämpften Schwingung.

$$\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} = \sqrt{(\pi\,s^{-1})^2 - \frac{(0{,}9210\,s^{-1})^2}{4}} \approx 2.0218\,s$$

A: Die Periodendauer der gedämpften Schwingung beträgt 2,02 s.

<u>**2.6**</u> Berechne die Stärke der Dämpfung für den Fall, dass die Schwingung komplett unterdrückt wird.

Bedingung für den Kriechfall bzw. aperiodischen Grenzfall:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,s} = \pi\,s^{-1}$$

$$\frac{\gamma^2}{4} \geq \omega_0^2 \quad | \quad \cdot 4$$
$$\Leftrightarrow \gamma^2 \geq \omega_0^2 \cdot 4 \quad | \quad \sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow \gamma \geq \omega_0 \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow \gamma \geq \pi\,s^{-1}\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow \gamma \geq 2\pi\,s^{-1}$$

A: Die Dämpfung müsste größer $\mathbf{6{,}28\,s^{-1}}$ betragen.