

Physik LK 12, Klausur 02 – Elektrisches Feld und Kondensator – Lösung 08.12.2010

Konstanten: Elementarladung $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Elektrische Feldkonstante: $8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{(\text{As})^2}{\text{Nm}^2}$

Dielektrizitätszahl: $\epsilon_r(\text{Luft}) = 1$

Aufgabe 1:

Eine studentische Hilfskraft wurde eingestellt, um acht Stunden lang Ladungen zu zählen (und zu summieren), die durch einen Leiterquerschnitt fließen. Gleichzeitig soll er nach Ablauf der acht Stunden eine Strommessung machen. Nach einiger Zeit glaubte er, eine Gesetzmäßigkeit beim Ladungsdurchfluss zu erkennen:

nach 1h	nach 2h	nach 3h	nach 4h
1/2 C	4/2 C	9/2 C	16/2 C

Nach der Hälfte der Schicht geht er nach Hause und trägt die Stromstärke schon im voraus ein.

Berechne, welche Stromstärke er in seine Tabelle einträgt.

Offenbar ist $Q(t) = \frac{1}{2} \frac{C}{h^2} t^2$ mit t in Stunden.

Dann ist $I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{C}{h^2} t$ $I(8) = \frac{C}{h^2} \cdot 8h = 8 \frac{C}{h} = \frac{8}{3600} \frac{C}{s} \approx 2,2 \text{ mA}$

A: Er trägt 2,2 mA in seine Tabelle ein.

Aufgabe 2:

Ein Kondensator mit der Kapazität $C = 0,02 \mu \text{ F}$ wurde mit der Spannung $U_0 = 3 \text{ V}$ aufgeladen. Anschließend wird er wieder über einen Widerstand $R = 2000 \text{ M } \Omega$ wieder entladen.

Das Diagramm auf der folgenden Seite zeigt den zeitlichen Verlauf der Stromstärke.

a) Bestimme grafisch, wieviel Ladung näherungsweise im Zeitraum zwischen $t = 20 \text{ s}$ und $t = 30 \text{ s}$ abgeflossen ist. Zeichne in das Diagramm ein, so dass der Lösungsansatz erkennbar wird.

Hinweis: Das Diagramm zeigt eine um sechs Größenordnungen zu große Stromstärke. Entsprechend entspricht das Ergebnis auch nicht der Realität.

Die geflossene Ladung ist die Fläche unter dem I-t-Diagramm. (siehe Skizze)

Rotes Rechteck: $I_1 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot 10 \text{ s} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ C} = 6 \text{ mC}$

Gelbes Dreieck: $I_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot 10 \text{ s} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ C} = 1 \text{ mC}$

Gesamtstromstärke $I = I_1 + I_2 = 7 \text{ mC}$

A: In diesem Zeitraum fließen etwa 7 mC Ladung.

Physik LK 12, Klausur 02 – Elektrisches Feld und Kondensator – Lösung 08.12.2010

b) Der Stromstärkenverlauf bei Entladung eines Kondensators folgt dem Gesetz

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \quad \text{Berechne die Stromstärke nach einer Minute.}$$

$$\begin{aligned} I(60s) &= \frac{3V}{2 \cdot 10^9 \Omega} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot 10^9 \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-8} F} \cdot 60s} = 1,5 \cdot 10^{-9} A \cdot e^{-\frac{1}{40 V A^{-1} \cdot C V^{-1}} \cdot 60s} = 1,5 \cdot 10^{-9} A \cdot e^{-1,5 V^{-1} C s^{-1} C^{-1} V s} \\ &= 1,5 \cdot 10^{-9} A \cdot e^{-1,5} \approx 1,5 \cdot 10^{-9} A \cdot 0,2231 \approx 3,35 \cdot 10^{-10} A = 335 pA \end{aligned}$$

A: Nach 60 s beträgt die Stromstärke noch 335 pA.

c) Berechne, nach welcher Zeit die Stromstärke unter 10 μA gesunken ist.

Hinweis: Das Diagramm zeigt eine um sechs Größenordnungen zu große Stromstärke. Entsprechend entspricht das Ergebnis auch nicht der Realität. Da die gesuchte Stromstärke von 10 μA nach dem Diagramm gewählt wurde, ist das mathematische Ergebnis eine negative Zeit. Bei der Korrektur wird dieser Umstand berücksichtigt.

Sei t_1 die gesuchte Zeit und I_1 die gegebene Stromstärke. Mathematisch gesehen suchen wir die x-Koordinate des Punktes $(t_1 | I_1)$ der Funktion $I(t)$.

Setze den Punkt in die Funktionsgleichung ein:

$$I_1 = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t_1} \quad | \quad \cdot \frac{R}{U_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R I_1}{U_0} = e^{-\frac{1}{RC} \cdot t_1} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{R I_1}{U_0}\right) = -\frac{1}{RC} \cdot t_1 \quad | \cdot (-RC)$$

$$\Leftrightarrow -RC(\ln(R I_1) - \ln(U_0)) = t_1$$

$$\Leftrightarrow t_1 = RC \cdot (\ln(U_0) - \ln(R I_1))$$

Zahlen einsetzen: $U_0 = 3 V$, $R = 2000 M \Omega$, $C = 0,02 \mu F$, $I_1 = 10 mA$

$$\Leftrightarrow t_1 = 2 \cdot 10^9 \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-8} F \cdot (\ln(3 V) - \ln(2 \cdot 10^9 \Omega \cdot 10^{-5} A))$$

$$\Leftrightarrow t_1 = 40 V A^{-1} A s V^{-1} \cdot (\ln(3) + \ln(V) - \ln(20000) - \ln(V))$$

$$\Leftrightarrow t_1 = 40 s \cdot (\ln(3) - \ln(20000))$$

$$\Rightarrow t_1 \approx 40 s \cdot (-8,8048)$$

$$\Leftrightarrow t_1 \approx -352,1950 s$$

Physik LK 12, Klausur 02 – Elektrisches Feld und Kondensator – Lösung 08.12.2010

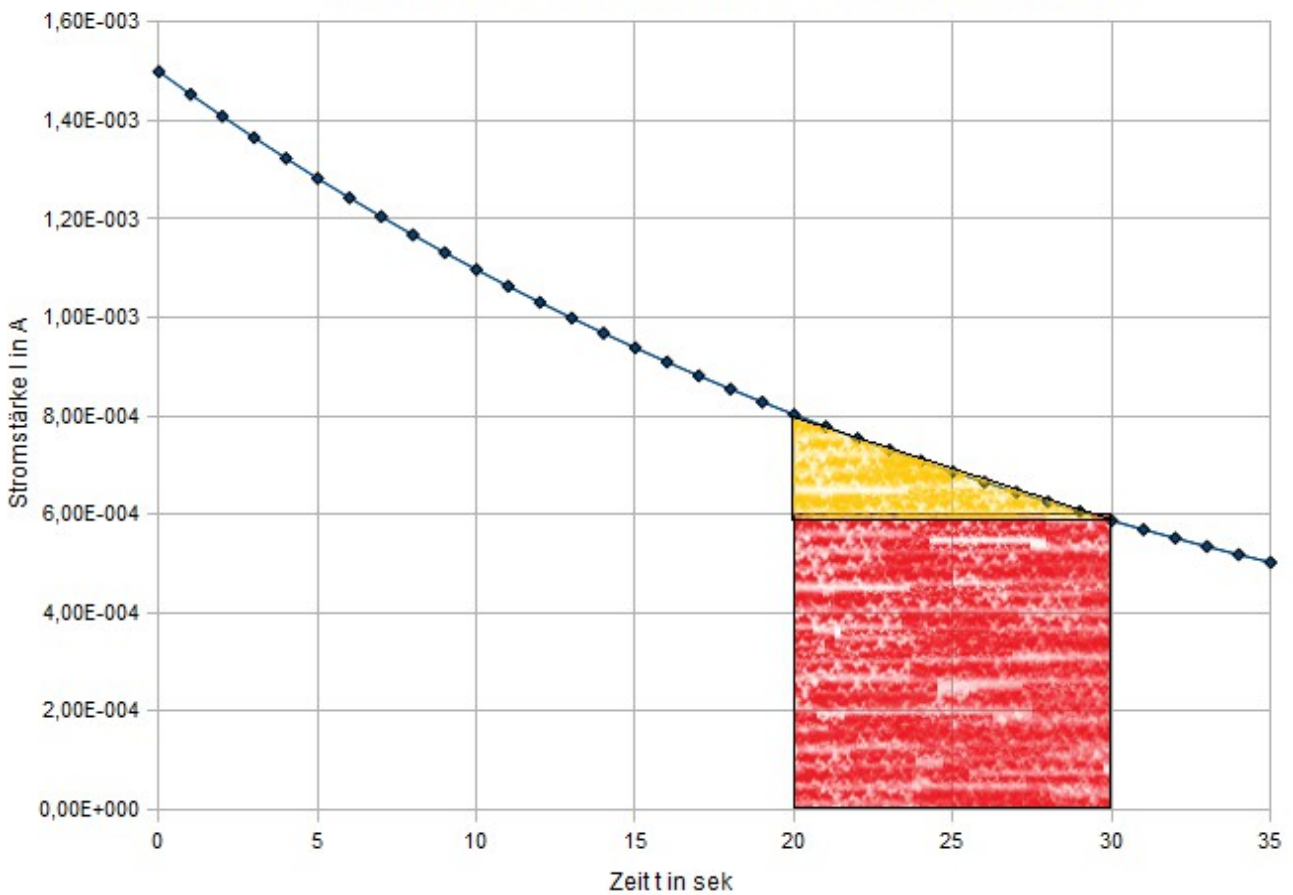
d) Berechne mit Hilfe dieses Gesetzes, wie viel Ladung zu Beginn auf dem Kondensator war.

$$Q(0) = \int_0^{\infty} I(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} dt = \frac{U_0}{R} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} dt = \frac{U_0}{R} \left[-RC e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \right]_0^{\infty} = \frac{U_0}{R} (0 - (-RC \cdot 1)) = U_0 C$$
$$= 3 V \cdot 0,02 \mu F = 3 \cdot 2 \cdot 10^{-8} \frac{C}{V} = 6 \cdot 10^{-8} C$$

e) Berechne die Anfangsladung mit einer anderen Methode.

$$Q_0 = U_0 \cdot C_0 = 3 V \cdot 0,02 \mu F = 3 \cdot 2 \cdot 10^{-8} \frac{C}{V} = 6 \cdot 10^{-8} C$$

Stromstärkenverlauf beim Entladen eines Kondensators



Aufgabe 3:

a) Ein Plattenkondensator für eine Schule soll eine Kapazität von minimal $C_{min}=5\text{ pF}$ bis maximal $C_{max}=0,4\text{ nF}$ erreichen können.

Berechne Maße für den Plattenkondensator, mit denen diese Werte erreicht werden können. Wähle die Maße einigermaßen realistisch.

$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\pi r^2}{d}$ Wähle als Radius $r = 5\text{ cm}$. Berechne daraus den maximal möglichen Abstand, damit die Minimalkapazität erreicht werden kann.

$$d_{max} = \epsilon_0 \epsilon_r \pi \frac{r^2}{C_{min}} = \pi \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2 \text{ s}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \cdot 1 \cdot \frac{(5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{5 \cdot 10^{-12} \text{ F}}$$
$$= \pi \cdot 8,8542 \text{ A s m}^{-1} \text{ V}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V C}^{-1} \approx 0,01391 \text{ m}$$

Berechnung des nötigen Minimalabstandes:

$$d_{min} = \epsilon_0 \epsilon_r \pi \frac{r^2}{C_{max}} = \pi \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2 \text{ s}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \cdot 1 \cdot \frac{(5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{4 \cdot 10^{-10} \text{ F}}$$
$$= \pi \cdot 8,8542 \cdot 10^{-2} \text{ A s m}^{-1} \text{ V}^{-1} \cdot 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V C}^{-1} \approx 2,2253 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 22 \mu \text{ m}$$

A: Ein Plattenkondensator mit einem Durchmesser von 10 cm, den man 14 cm auseinander ziehen kann und dessen Platten so glatt sind, dass man sie auf 22 mm Abstand bringen kann, erfüllt die Voraussetzungen. Bei einem größeren Durchmesser könnte der Abstand auch größer sein.

b) Nenne Kriterien, nach denen man einen Kondensator bauen muss, damit er eine möglichst hohe Kapazität hat.

Naher Plattenabstand, große Fläche, hohe Dielektrizitätszahl, Universum mit großer elektrischer Feldkonstante.

Aufgabe 4:

Ein physikalisch interessierter, aber sonst nicht sehr geschäfttüchtiger Unternehmer überlegt sich eine alternative zu den sogenannten "indoor skydiving"-Anlagen, die mit Hilfe eines starken Luftstroms Menschen schweben lassen.

"Das müsste mit Hilfe elektrischer Felder doch auch sehr viel leiser gehen", denkt er sich.

Bauen wir also einen großen Plattenkondensator mit runden Platten von 3 m Durchmesser. Man soll damit 4 m hoch fliegen können. Aus Sicherheitsgründen sollten die Platten einen Abstand von 5 m haben.

a) Berechne die Kapazität C des Plattenkondensators.

Physik LK 12, Klausur 02 – Elektrisches Feld und Kondensator – Lösung 08.12.2010

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{(As)^2}{Nm^2} \frac{\pi (1,5m)^2}{5m} = 1,2517 \cdot 10^{-11} \frac{(As)^2}{Nm}$$
$$= 1,2517 \cdot 10^{-11} \frac{C}{V} = 1,2517 \cdot 10^{-11} F = \mathbf{12,5 pF}$$

A: Die Kapazität beträgt 12,5 pF.

b) Im Probetrieb wird eine Spannung von $U = 1000 V$ angelegt. Berechne die Feldstärke E des entstehenden Feldes.

$$E = \frac{U}{d} = \frac{1000 V}{5 m} = \mathbf{200 V m^{-1}}$$

A: Das Feld hat eine elektrische Feldstärke von 200 V/m.

c) Berechne die Ladung auf dem Plattenkondensator im Probetrieb.

$$Q = C \cdot U = 1,2517 \cdot 10^{-11} \frac{C}{V} \cdot 1000 V = \mathbf{1,2517 \cdot 10^{-8} C}$$

d) Berechne die Energiedichte des entstehenden elektrischen Feldes im Probetrieb.

$$\rho_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{C}{V} \cdot \left(200 \frac{V}{m}\right)^2 = \mathbf{1,77084 \cdot 10^{-7} J m^{-3}}$$

e) Im Probetrieb soll ein Frosch zum Schweben gebracht werden. Der Frosch hat die Masse von 100 g. Berechne, wie stark der Frosch aufgeladen werden muss.

Gewichtskraft und elektrische Feldkraft müssen im Gleichgewicht sein.

$$F_G = F_E \Leftrightarrow mg = QE \Leftrightarrow Q = \frac{mg}{E} = \frac{0,1 kg \cdot 9,81 N kg^{-1}}{200 V m^{-1}} = 4,905 \cdot 10^{-3} \frac{Nm}{V} = \mathbf{4,905 mC}$$

f) Leider berührt der Frosch beim Probetrieb die obere Kondensatorplatte. Innerhalb von einer zehntel Sekunde wird der Frosch entladen. Berechne die mittlere Stromstärke.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{4,905 \cdot 10^{-3} C}{0,1 s} = 4,905 \cdot 10^{-2} C s^{-1} = \mathbf{49,05 mA}$$

g) Nach dem Frosch wird ein Stuntman mit 0,5 C geladen. Berechne die notwendige Spannung, damit der Mann mit der Masse von insgesamt 90 kg schweben kann.

$$F_G = F_E \Leftrightarrow mg = QE \Leftrightarrow E = \frac{mg}{Q} \Leftrightarrow \frac{U}{d} = \frac{mg}{Q} \Leftrightarrow U = \frac{mgd}{Q}$$

$$U = \frac{90 kg \cdot 9,81 N kg^{-1} \cdot 5 m}{0,5 C} = \mathbf{8829 V}$$

h) Leider hat man sich verrechnet und die doppelte Spannung angelegt. Berechne die

Physik LK 12, Klausur 02 – Elektrisches Feld und Kondensator – Lösung 08.12.2010

Geschwindigkeit, mit welcher der Mann auf die obere Platte auftrifft. (Start an der unteren Platte.)

$$E = \frac{U}{d} = \frac{17658 \text{ V}}{5 \text{ m}} = 3531,6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$F_R = F_E - F_G = Q E - m g = 0,5 \text{ C} \cdot 3531,6 \text{ V m}^{-1} - 90 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ N kg}^{-1} \\ = 1765,8 \text{ N} - 882,9 \text{ N} = 882,9 \text{ N}$$

Man kann auch einfach wegen der Proportionalität zwischen Spannung und Kraft argumentieren, dass die Kraft nach oben doppelt so groß wie die Gewichtskraft sein muss. Wir haben also einen freien Fall "nach oben".

$$F = m a \Leftrightarrow a = \frac{F}{m} = -9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$s = \frac{1}{2} a t^2; v = a t \Leftrightarrow v = \sqrt{2 a s} = \sqrt{2 \cdot (-9,81) \text{ m s}^{-2} \cdot (-5) \text{ m}} \approx 9,90 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 35,66 \text{ km/h}$$

A: Er trifft mit etwa 36 km/h auf die obere Platte.

Aufgabe 5:

Robert Milikan (1868-1953) hat 1923 den Nobelpreis für Physik für die experimentelle Bestimmung der Elementarladung e erhalten.

a) Erläutere das von Milikan durchgeführte Experiment und wie damit die Elementarladung bestimmt wurde.

siehe Buch

b) In späteren Jahren gab es Kritik an Milikan wegen der Verfälschung von Messergebnissen. Er soll aus verschiedenen Messreihen passende Ergebnisse herausgesucht und schlechte Ergebnisse aussortiert haben.

Nehmen wir an, die folgende Tabelle gibt eine Reihe von Milikans Messergebnissen wieder.

Nr.	1	2	3	4	5
Q/C	$1,925604 \cdot 10^{-16}$	$2,084202 \cdot 10^{-16}$	$2,999745 \cdot 10^{-16}$	$3,2445306 \cdot 10^{-16}$	$3,70222 \cdot 10^{-16}$
$Q \cdot e^{-1}$	1202	1301	1872,5	2025,3	2311

Sortiere die unpassenden Ergebnisse aus. Begründe deine Entscheidung (mit einer Rechnung).

A: Die gemessene Ladung sollte ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung sein (siehe Tabelle). Dementsprechend wird Messung 3 und Messung 4 aussortiert.

Physik LK 12, Klausur 02 – Elektrisches Feld und Kondensator – Lösung 08.12.2010

Aufgabe 6:

Ein Heliumatom besteht aus einem Atomkern mit zwei Protonen und zwei Neutronen sowie der Atomhülle mit zwei Elektronen.

Die Protonen liegen eng beieinander, obwohl sich gleichnamige Ladungen doch abstoßen.

Vermutung: Die Protonen werden durch die Gravitationskraft zusammen gehalten.

Im folgenden werden die Neutronen in der Rechnung vernachlässigt.

Teilchen	Masse m [kg]	Elektr. Ladung Q [C]
Proton	$1,6726 \cdot 10^{-27}$	$1,6022 \cdot 10^{-19}$
Neutron	$1,6749 \cdot 10^{-27}$	0
Elektron	$9,1094 \cdot 10^{-31}$	$-1,6022 \cdot 10^{-19}$

Der Atomradius eines Heliumatoms beträgt etwa $r_H = 130 \text{ pm}$.

Der Radius des Heliumkerns etwa $r_K = 2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.

a) Vergleiche in einer Rechnung die Gravitationskraft, mit der sich die Protonen anziehen, mit der elektrischen Feldkraft, mit der sich die Protonen abstoßen.

Entscheide anhand deiner Rechnung, ob die Vermutung oben zutreffen kann.

Gravitative Anziehungskraft:
$$F_G = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot \frac{(1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2}{(2 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2}$$
$$= 46,6700 \cdot 10^{-36} \text{ kg m s}^{-2} = \mathbf{4,6700 \cdot 10^{-35} \text{ N}}$$

Elektrostatische

Abstoßungskraft:
$$F_{El} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12} (\text{As})^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}} \cdot \frac{(-1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(2 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2}$$
$$= \mathbf{57,6641 \text{ N}}$$

Verhältnis:
$$\frac{F_{El}}{F_G} = 1,2348 \cdot 10^{36}$$

A: Die Vermutung kann nicht zutreffen, da die elektrische Abstoßungskraft um 36 Größenordnungen stärker als die Gravitationskraft zwischen den Protonen ist.

b) Wir hatten die Neutronen vernachlässigt. Begründe (ohne weitere Rechnung), ob die zusätzliche Anziehungskraft durch die Masse der Neutronen eine Rolle spielen kann.

A: Sie können keine Rolle spielen, denn die Masse und wird nur verdoppelt und die Graviationskraft somit nur vervierfacht.

c) Nach dem Bohrschen Atommodell bewegen sich die Elektronen auf Kreisbahnen um den Atomkern.

Berechne die Bahngeschwindigkeit ein Elektron nach diesem Modell hätte.

Physik LK 12, Klausur 02 – Elektrisches Feld und Kondensator – Lösung 08.12.2010

Elektrostatistische Anziehungskraft zwischen Kernprotonen und einem Elektron:

$$F_{El} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12} (As)^2 N^{-1} m^{-2}} \cdot \frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} C \cdot (-1,602) \cdot 10^{-19} C}{(1,3 \cdot 10^{-10} m)^2}$$
$$= 2,7297 \cdot 10^{-8} N$$

$$F_Z = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{F_Z \frac{r}{m}} = \sqrt{2,7297 \cdot 10^{-8} kg m s^{-2} \cdot \frac{1,3 \cdot 10^{-10} m}{9,1094 \cdot 10^{-31} kg}} = 1,9737 \cdot 10^6 \frac{m}{s} = 1973 \frac{km}{s}$$

A: Das Elektron bewegt sich theoretisch mit 1973 km/s um den Kern. Das sind 0,65% der Lichtgeschwindigkeit.

d) Berechne, wie groß ist die errechnete Spannung zwischen dem Heliumkern und einem Elektron auf seiner Kreisbahn ist.

Die Spannung ist eine Potentialdifferenz im elektrischen Radialfeld.

$$U_{12} = \Delta \phi = \phi_2 - \phi_1 \quad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$U_{12} = \phi(\text{Hüllenradius}) - \phi(\text{Kernradius}) \quad \text{Unter Berücksichtigung, dass } r_K \ll r_H:$$

$$U = \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0 r_H} - \frac{Q_p}{4\pi\epsilon_0 r_K} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_e}{r_H} - \frac{Q_p}{r_K} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e}{r_H} - \frac{-e}{r_K} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e}{r_H} + \frac{e}{r_K} \right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_H}$$
$$= \frac{-1,602 \cdot 10^{-19} As}{4\pi \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12} (As)^2 N^{-1} m^{-2} \cdot 1,3 \cdot 10^{-10} m} = 11,0754 N m (As)^{-1} = -11,0754 V$$

A: Die theoretische Spannung beträgt ca. 11 Volt.