**Physik LK 11, 3. Klausur – Harmonischer Oszillator – Lösung** **20.05.2010**

*Die Rechnungen bitte vollständig angeben und die* Einheiten mitrechnen. Antwortsätze schreiben*, wenn Zahlenwerte zu berechnen sind. Die Reibung ist bei allen Aufgaben zu vernachlässigen, wenn nicht explizit anders verlangt. Besondere Näherungen bitte angeben. Die Erdbeschleunigung ist mit g = 9,81 m/s² einzurechnen.*

**Die Grube und das Pendel,** *Egdar Allen Poe (1842)*

*"Es mochte eine halbe Stunde vergangen sein, vielleicht sogar eine ganze Stunde – denn ich konnte die Zeit nur unvollkommen berechnen –, als ich meine Augen wieder aufwärts wandte. Was ich nun sah, verwunderte und entsetzte mich. Die Schwingungen des Pendels hatten an Ausdehnung fast um einen Meter zugenommen. Als natürliche Folge war auch die Schnelligkeit viel größer; was mich aber hauptsächlich beunruhigte, war die Tatsache, daß es sich merklich herabgesenkt hatte. Ich bemerkte jetzt mit namenlosem Schrecken, daß sein unterer Teil in einem Halbmond aus blitzendem Stahl bestand, der von einem Horn zum andern etwa einen Fuß maß; die Hörner waren nach oben gerichtet, und die untere Kante schien scharf wie ein Rasiermesser. Das Pendel schien auch so massiv und schwer wie ein solches, denn es verdickte sich nach oben zusehends. Es hing an einem dicken Messingstab, und das Ganze zischte beim Durchschneiden der Luft.*

*Ich konnte nicht länger zweifeln, welche neue Todesmarter die in Grausamkeit so erfinderischen Mönche für mich ausgewählt hatten..."*

Egdar Allen Poe war in seinen quantitativen Angaben in dieser Geschichte leider etwas ungenau.

Wir müssen also einige Annahmen treffen:

Näherungen:

- Wir betrachten das Pendel als mathematisches Pendel.
- Die mit der Näherung $\sin(x)=x$ hergeleitete Formel gilt auch für große Winkel.
- Im Gegensatz zur Geschichte steigt die Amplitude nicht an.

Annahmen:

- Der Abstand von der Brust der Opfers zur Gefängnisdecke beträgt $h_0=12\,m$ *bei* $t=0\,s$.
- Die Länge des Pendels beträgt $l=4{,}36\,m$ und es an der Decke befestigt.
- Die Masse des Pendels beträgt $m=200\,kg$.
- Die maximale Auslenkung des Pendels beträgt $\hat{y}=2\,m$ .
- Zum Zeitpunkt $t=0\,s$ befindet sich das Pendel in der Ruhelage.
- Innerhalb einer Minute senkt sich die Decke um $\Delta h=6\,cm$ nach unten.

*Die Aufgaben beginnen auf Seite 2*

**Physik LK 11, 3. Klausur – Harmonischer Oszillator – Lösung** **20.05.2010**

**<u>Aufgabe 1:</u> Das ungedämpfe Todespendel**

**a)** Berechne die Eigenkreisfrequenz des Todespendels. *(3 Punkte)*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{4{,}36\,m}} = \sqrt{2{,}25\,\frac{1}{s^2}} = 1{,}5\,\frac{1}{s}$$

***A: Die Eigenkreisfrequenz beträgt 1,5 $s^{-1}$.***

**b)** Berechne die Periodendauer des Pendels. *(3 Punkte)*

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1{,}5\,s^{-1}} = \frac{4}{3}\pi\,s \approx 4{,}19\,s.$$

***A: Die Periodendauer beträgt etwa 4,2 s.***

**c)** Stelle die Bewegungsgleichung $y(t)$ für die Auslenkung des ungedämpften Pendels mit der Ruhelage des Pendels als Bezugspunkt auf (d.h. ohne Berücksichtigung des herabsinkenden Decke). *(2 Punkte)*

$$\boldsymbol{y(t) = \hat{y}\cdot\sin(\omega t) = 2\,m\cdot\sin\left(1{,}5\,s^{-1}t\right)}$$

**d)** Berechne die Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 21{,}29301687\,s$ $\left(=\frac{61}{9}\pi\,s\right)$ *(3 Punkte)*

$$\boldsymbol{y(21{,}29301687\,s)} = 1{,}5\,m\cdot\sin\left(1{,}5\,s^{-1}\cdot\frac{61}{9}\pi\,s\right) = 1{,}5\,m\cdot\sin\left(\frac{61}{6}\pi\right) = 2\,m\cdot 0{,}5 = \boldsymbol{1\,m}$$

***A: Die Auslenkung zum Zeitpunkt*** $\boldsymbol{t = \frac{61}{9}\pi\,s}$ ***beträgt 1 m.***

**e)** Berechne die Geschwindigkeit des Beils in der Ruhelage. *(4 Punkte)*

In der Ruhelage ist die Gesamtenergie gleich der kinetischen Energie und die Geschwindigkeit maximal. Bei maximaler Auslenkung ist die Gesamtenergie gleich der potentiellen Energie. Also gilt:

$$E_{Pot}(y(t) = \hat{y}) = E_{Kin}(y(t) = 0)$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2\hat{y}^2 = \frac{1}{2}m\hat{v}^2 \quad | \quad :0{,}5\,m$$

$$\Leftrightarrow \omega^2\hat{y}^2 = \hat{v}^2 \quad | \quad \sqrt{}$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{\hat{v}}| = \omega\,\hat{y} = 1{,}5\,s^{-1}\cdot 2\,m = \boldsymbol{3\,\frac{m}{s}} = 10{,}8\,\frac{km}{h}$$

***A: Die Geschwindigkeit des Beils am tiefsten Punkt der Auslenkung beträgt 10,8 km/h.***

**f)** Berechne die Sinkgeschwindigkeit $v_D$ der Decke in m/s. *(2 Punkte)*

Sinkgeschwindigkeit der Decke: $\boldsymbol{v_D} = \frac{6\,cm}{1\,min} = \frac{0{,}06\,m}{60\,s} = 0{,}001\,\frac{m}{s} = \boldsymbol{1\cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s}}$

***A: Die Singeschwindigkeit der Decke beträgt*** $\boldsymbol{v_D = 0{,}001\,\frac{m}{s}}$.

**g)** Berechne, wie viel Zeit dem Opfer noch bleibt, bis die Klinge seine Brust berührt. Löse die Aufgabe ohne Berücksichtigung der aktuellen Auslenkung *y(t)*, also nur für einen Zeitpunkt $t_0$, der ein Vielfaches von *T* ist. Runde auf die nächste volle Sekunde auf. *(5 Punkte)*

Die vereinfachte Bewegungsgleichung lautet:

$$s_y(t)=h_0-v_D\cdot t-l=12\,m-0{,}001\frac{m}{s}\cdot t-4{,}36\,m=7{,}64\,m-0{,}001\frac{m}{s}\cdot t$$

$$0=7{,}64\,m-0{,}001\frac{m}{s}\cdot t_1 \quad | \quad +0{,}001\frac{m}{s}\cdot t_1$$

$$\Leftrightarrow 0{,}001\frac{m}{s}\cdot t_1=7{,}64\,m \quad | \quad :0{,}001\frac{m}{s}$$

$\Leftrightarrow t_1=7640\,s$ Das sind $n=\frac{t_1}{T}=1823{,}92$ Perioden. Nächster Zeitpunkt $t_0$ einer vollen Periode

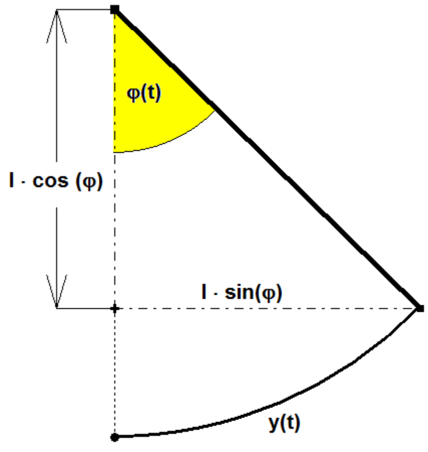
$$\boldsymbol{t_0}=1824\cdot T=\frac{1824\cdot 4}{3}\pi=7640{,}35\,s=\mathbf{7641\,s}$$

***A: Nach 2 h, 7 min und 21 sek kommt jede Rettung zu spät.***

**h)** Stelle die Bewegungsgleichung $s_y(t)$ auf, welche die Höhe des Beils über der Brust des Opfers angibt, unter Berücksichtigung der herabsinkenden Decke. (Also nur die y-Komponente des tatsächlichen Abstands). *(5 Punkte)*

*Hinweis: Es genügt die Auslenkung aus Aufgabe c) als y(t)* anzugeben und die Angabe der Variablennamen ohne Einsetzen der Zahlen.

*Tipp: Stelle zunächst eine Gleichung für den Auslenkwinkel φ(t) auf.*




Aktueller Auslenkwinkel $\phi(t)=\frac{y(t)}{l}$

Aktuelle Deckenhöhe: $h_D(t)=h_0-v_D\cdot t$

Aktueller vertikaler Abstand zur Decke: $y_v(t)=l\cdot\cos(\phi(t))$

$$\boldsymbol{s_y(t)}=h_0-v_D\cdot t-l\cdot\cos(\phi(t))=\boldsymbol{h_0-v_D\cdot t-l\cdot\cos\left(\frac{y(t)}{l}\right)}$$

Eingesetzt: $$s_y(t)=h_0-v_D\cdot t-l\cdot\cos\left(\frac{\hat{y}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)}{l}\right)$$

Alternativ kann man auch $\phi(t)=\omega t$ als Winkel setzen, weil die Näherung $\sin(x)=x$ gilt.

**i) (Bonusaufgabe)** Stelle die Bewegungsgleichung s(t) auf, welche den tatsächlichen Abstand des Beils von der Brust des Opfers angibt. *(Ergebnis aus Aufgabe h) wird benötigt)*
*(4 Bonuspunkte)*

*Hinweis: Es genügt die Auslenkung aus Aufgabe a) als y(t)* anzugeben und die Angabe der Variablennamen ohne Einsetzen der Zahlen.

Bewegungsgleichung für die x-Komponente des Abstands: $s_x(t) = l \sin(\phi(t))$

Abstand: $\mathbf{s(t)} = \sqrt{s_x(t)^2 + s_y(t)^2} = \sqrt{\mathbf{l^2 \cdot \sin^2\left(\frac{y(t)}{l}\right) + \left(h_0 - v_D \cdot t - l \cdot \cos\left(\frac{y(t)}{l}\right)\right)^2}}$

Setzt man alles ein, erhält man diese handliche Gleichung (nicht nötig für volle Punktzahl):

$$s(t) = \sqrt{l^2 \sin^2\left(\frac{\hat{y}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)}{l}\right) + \left(h_0 - v_D \cdot t - l \cdot \cos\left(\frac{\hat{y}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)}{l}\right)\right)^2}$$

Alternativ kann man auch $\phi(t) = \omega t$ als Winkel setzen, weil die Näherung $\sin(x) = x$ gilt.

**<u>Aufgabe 2:</u> Das gedämpfe Todespendel**

Kleine Abwandlung der Geschichte von Egdar Allen Poe:

*"Der Halbmond aus Stahl war am tiefsten Punkt der Schwingung nur noch wenige Fuß von mir entfernt, da vernahm ich ein lautes Knirschen, welches offensichtlich dem Mechanismus entsprang, der die Schwingung diesen fürchterlichen Marterinstrumentes aufrecht erhielt. Und tatsächlich glaubte ich nach einiger Zeit zu erkennen, dass das Beil, welches mich aufschlitzen sollte, nun nicht mehr ganz so hoch schwang. Dann war ich mir sicher: Langsam kam die Schwingung des Todesapparates zum Erliegen. Die Frage war nur, ob diese glückliche Fügung des Schicksals nicht zu spät kam..."*

Annahmen und Hinweise:

- Als die Dämpfung einsetzt, befindet sich das Pendel in der Lage der maximalen Auslenkung.
- Ungedämpft dauert zu diesem Zeitpunkt es noch 500 sek, bis das Beil die Brust des Opfers berührt.
- Nachdem die Dämpfung einsetzt, beträgt die maximale Auslenkung der nächsten Periode nur noch 1,95 m.
- Benutze $\omega_0 = 1{,}5\,s^{-1}$ für die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Pendels.

**a)** Zeige, dass das logarithmische Dekrement $\Lambda$ für das gedämpfte Pendel etwa den Wert 0,025 hat. *(3 Punkte)*

$$\Lambda = \ln\left(\frac{y(t_n)}{y(t_{n+1})}\right) = \ln\left(\frac{2\,m}{1{,}95\,m}\right) = \ln\left(\frac{40}{39}\right) \approx 0{,}02531780798$$

***A: Das logarithmische Dekrement beträgt etwa $\Lambda$ = 0,025.***

**b)** Zeige, dass die Dämpfungskonstante $\beta$ etwa *2,42 kg/s* beträgt. (Benutze den <u>genauen</u> Wert für $\Lambda$ aus Aufgabe a) ). *Tipp: Zwischenergebnis* $\gamma \approx 0{,}012\,s^{-1}$ *(6 Punkte)*

$$\Lambda = \frac{\gamma\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} \quad |\ ^2$$

$$\Rightarrow \Lambda^2 = \frac{\gamma^2\pi^2}{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad | \quad \cdot\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \Lambda^2 \cdot \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right) = \gamma^2\pi^2 \quad | \text{ T}$$

$$\Leftrightarrow \Lambda^2\omega_0^2 - \Lambda^2\frac{\gamma^2}{4} = \gamma^2\pi^2 \quad | \quad +\Lambda^2\frac{\gamma^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \Lambda^2\omega_0^2 = \pi^2\gamma^2 + \frac{\Lambda^2}{4}\gamma^2 \quad | \text{ T}$$

$$\Leftrightarrow \Lambda^2\omega_0^2 = \gamma^2\left(\pi^2 + \frac{\Lambda^2}{4}\right) \quad | \quad :\left(\pi^2 + \frac{\Lambda^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{\Lambda^2\omega_0^2}{\left(\pi^2 + \frac{\Lambda^2}{4}\right)} \quad | \text{ Zahlen einsetzen}$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{\ln\left(\frac{40}{39}\right)^2 \left(1{,}5\,s^{-1}\right)^2}{\left(\pi^2 + \frac{\ln\left(\frac{40}{39}\right)^2}{4}\right)} \approx 1{,}461261442 \cdot 10^{-4}\,s^{-2} \quad | \quad \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \gamma = 0{,}01208826473\,s^{-1}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \gamma \cdot m \approx \mathbf{2{,}417652946\,\frac{kg}{s}}$$

***A: Die Dämpfungskonstante beträgt etwa $\beta$ = 2,42 kg/s.***

**c)** Berechne den Unterschied zwischen der Kreisfrequenz $\omega$ des gedämpften Pendels und der Eigenkreisfrequenz $\omega_0$ des ungedämpften Pendels. *(4 Punkte)*

$$\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \sqrt{\left(1{,}5\,s^{-1}\right)^2 - \frac{\left(0{,}01208826473\,s^{-1}\right)^2}{4}} \approx \mathbf{1.49998782277\,s^{-1}}$$

$$\boldsymbol{\Delta\omega} = \omega_0 - \omega = \mathbf{1{,}217723 \cdot 10^{-5}\,s^{-1}}$$

***A: Der Unterschied zur Eigenkreisfrequenz beträgt etwa $\mathbf{1{,}2 \cdot 10^{-5}\,s^{-1}}$ .***

**d)** Berechne, wie groß die Dämpfungskonstante $\beta$ sein müsste, damit die Schwingung innerhalb einer Periode zum Erliegen kommt. *(5 Punkte)*

Bedingung für den Kriechfall bzw. aperiodischen Grenzfall:

$$\frac{\gamma^2}{4} \geq \omega_0^2 \quad | \quad \cdot 4$$
$$\Leftrightarrow \gamma^2 \geq \omega_0^2 \cdot 4 \quad | \quad \sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow \gamma \geq \omega_0 \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow \gamma \geq 1{,}5\, s^{-1} \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow \gamma \geq 3\, s^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{200\, kg} \geq 3\, s^{-1} \quad | \quad \cdot 200\, kg$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} \geq 3\, s^{-1} \cdot 200\, kg \geq \mathbf{600 \frac{kg}{s}}$$

***A: Die Dämpfungskonstante $\beta$ müsste größer als 600 kg/s sein.***

**e)** Berechne den Zeitpunkt $t_1$, zu dem die Amplitude des Pendels $\hat{y}(t) < 10\, cm$ ist. *(5 Punkte)*

Betrachte immer nur den Vollausschlag. Die Gleichung für die jeweils maximale Auslenkung lautet dann:

$$\hat{y}(t_1) = \hat{y}_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t_1} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}1\, m) = \ln(2\, m) - \frac{\gamma}{2} t_1$$
$$\Leftrightarrow \ln(0{,}1) + \ln(m) = \ln(2) + \ln(m) - \frac{\gamma}{2} t_1 \quad | \quad -\ln(m) - \ln(2)$$
$$\Leftrightarrow \ln(0{,}1) - \ln(2) = -\frac{\gamma}{2} t_1$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{0{,}1}{2}\right) = -\frac{\gamma}{2} t_1 \quad : -\frac{\gamma}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{\gamma} \ln\left(\frac{2}{0{,}1}\right) = t_1$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{0{,}01208826473\, s^{-1}} \ln\left(\frac{2}{0{,}1}\right) = t_1$$

$$\Leftrightarrow t_1 \approx 495{,}64\, s$$

***A: Nach etwa 8 min und 16 sek kommt die Schwingung praktisch zum Erliegen.***

**f) (Bonusaufgabe)** Nehmen wir an, dass das Opfer die Schwingung des Beils bei einer Amplitude von $\hat{y}(t) < 10\, cm$ überleben könnte. Überlebt das Opfer durch das Einsetzen der Dämpfung? *(1 Bonuspunkt)*

***A: Nein, denn die Decke senkt sich ja weiterhin ab.***