Physik LK 11, 2. Klausur – Energie, Leistung, Impuls, Rotation – Lösung 22.02.2010

Name: ______________________________

Die Rechnungen bitte vollständig angeben und die Einheiten mitrechnen. Antwortsätze schreiben. Die Reibung ist bei allen Aufgaben zu vernachlässigen, wenn nicht explizit anders verlangt. Besondere Näherungen bitte angeben. Die Erdbeschleunigung ist mit g = 9,81 m/s² einzurechnen.

Ein Besuch in London

<u>Aufgabe 1:</u> Hinflug

Die erfolgreiche Geschäftsfrau Jana T. beschließt für ein Shopping-Wochenende nach London zu fliegen. Dazu steigt sie in Düsseldorf in ihren privaten Learjet. London und Düsseldorf liegen beide recht genau auf dem 51. Breitengrad.

Learjet 60

Die beiden Pratt-und-Whitney-Triebwerke des Learjet 60 haben eine Schubkraft von je 20,46 kN. Das Flugzeug fliegt mit einer Masse von 9t.

Die Reibung und der Masseverlust aufgrund von Treibstoffverbrauch wird in den folgenden Aufgaben vernachlässigt.

a) Das Flugzeug startet und beschleunigt mit vollem Schub. Nach 10 min hat es seine Reisehöhe von $h=9\,km$ und die Reisegeschwindigkeit von $v=780\,km/h$ erreicht. Berechne auf Basis dieser Daten die theoretische Leistung der Triebwerke.

$$P=\frac{\Delta E}{\Delta t}=\frac{\Delta E_{POT}+\Delta E_{KIN}}{\Delta t}=\frac{m\,g\,h+\frac{1}{2}m\,v^2}{\Delta t}=\frac{9000\,kg\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot 9000\,m+\frac{1}{2}\cdot 9000\,kg\cdot\left(\frac{780}{3{,}6}\,\frac{m}{s}\right)^2}{10\cdot 60\,s}$$

$$=\quad 1{,}68\cdot 10^6\,kg\,\frac{m}{s}=1{,}68\cdot 10^6\,W=1676\,kW$$

A: Die Leistung beträgt 1676 kW.

b) Der Learjet fliegt nun mit konstanter Geschwindigkeit durch ein Gewitter. Die Regentropfen klatschen gegen die Windschutzscheibe, verharren kurz, und laufen dann ab. Pro Sekunde treffen 100 Regentropfen mit dem Durchmesser von 5 mm die Windschutzscheibe. Berechne den theoretischen Geschwindigkeitsverlust des Flugzeugs in km/h innerhalb von 10 min.

Die Regentropfen erhalten durch den Stoss die Reisegeschwindigkeit von 780 km/h. Da sie wieder ablaufen, verändert sich die Masse des Flugzeuges nicht.

Berechne die Masse der gesammelten Regentropfen in 10 min.

1 Regentropfen: $m_T = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi(0{,}25\,cm)^3 \cdot 1\,\frac{g}{cm^3} = 0{,}00654\,g$

Anzahl Regentropfen in 10 min: $x = 100 \cdot 60 \cdot 10 = 60.000$
Masse aller Regentropfen in 10 min: $m_R = m_T \cdot x = 3926{,}99\,g = 3{,}927\,kg$

Aufgenommener Impuls aller Regentropfen:

$$p_R = m_R \cdot v = 3{,}927\,kg \cdot 216{,}67\,\frac{m}{s} = 850{,}85\,kg\,\frac{m}{s}$$

Impuls des Flugzeuges vorher:

$$p_1 = m_1 \cdot v_1 = 9000\,kg \cdot 216{,}67\,\frac{m}{s} = 1{,}95 \cdot 10^6\,kg\,\frac{m}{s}$$

Impuls der Flugzeuges nachher:

$$p_2 = p_1 - P_R = 1{,}95 \cdot 10^6\,kg\,\frac{m}{s} - 850{,}85\,kg\,\frac{m}{s} = 1{,}949 \cdot 10^6\,kg\,\frac{m}{s}$$

Masse des Flugzeuges konstant, also $m_2 = m_1$

$$p_2 = m_2 v_2 = m_1 v_2$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \frac{p_2}{m_1} = \frac{1{,}949 \cdot 10^6\,kg\,\frac{m}{s}}{9000\,kg} = 216{,}58\,\frac{m}{s}$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 215{,}91\,\frac{m}{s} - 216{,}67\,\frac{m}{s} = -0{,}0912\,\frac{m}{s} = -0{,}328\,\frac{km}{h}$$

A: Der theoretische Geschwindigkeitsverlus beträgt 0,3 km/h.

Physik LK 11, 2. Klausur – Energie, Leistung, Impuls, Rotation – Lösung 22.02.2010

<u>Aufgabe 2:</u> In London

London Eye

Nach einer ausgedehnter Shopping-Tour in London ist das Angebot der Schuhgeschäfte doch recht stark ausgedünnt.

Trotzdem bleibt noch Zeit für den Besuch einer der Londoner Attraktionen, dem Riesenrad London Eye. Es ist mit 135 m Höhe (Einstieg auf 1 m Höhe) das derzeit drittgrößte Riesenrad der Welt. Die Gondeln bewegen sich mit einer Geschwindigkeit von nur 0,26 m/s, so dass die Fahrgäste ein- und aussteigen können, ohne dass das Rad anhalten muss.

a) Berechne, wie lange dauert ein Umlauf dauert.

$$v=2\pi\frac{r}{T}$$

$$\Leftrightarrow T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi\cdot 67\,m}{0{,}26\,\frac{m}{s}}=1619\,s=27\,min$$

A: Ein Umlauf dauert ca. 27 min.

b) Berechne die Winkelgeschwindigkeit des Riesenrads.

$$\omega=2\frac{\pi}{T}=2\frac{\pi}{1619}s=3{,}88\cdot 10^{-3}\frac{1}{s}$$

A: Die Winkelgeschwindigkeit beträgt 0,22° pro Sekunde.

c) Ein Umlauf dauert also relativ lang. Zeit genug, um die neu gekaufte Designer-Personenwaage auszuprobieren.

Beschreibe den physikalischen Sachverhalt bei der Benutzung von Personenwaagen in Riesenrädern auf der Erde und den Effekten, die – im Prinzip – auftreten können.

In der Erklärung sollte vorkommen:

Personenwaage: Federkraft = Gewichtskraft + y-Komponente der Fliehkraft.
y-Komponente der Fliehkraft ist in der oberen Hälfte gegen die Gewichtskraft gerichtet, untere Hälfte gleich gerichtet. Somit kann die Waage unter bestimmten Bedingungen auch Null anzeigen.
Gravitation: Für die genaue Gravitationskraft müsste G* berücksichtigt werden, also Breitengrad und evtl. sogar die Höhe des Riesenrads.

d) Verändere die Bahngeschwindigkeit des Riesenrads so, dass die Waage an genau zwei Punkten des Umlaufs nur das halbe Gewicht wie außerhalb des Riesenrads anzeigt. Benenne die Bahngeschwindigkeit und die Punkte, an denen die Bedingung erfüllt ist.

Bedingung: Die y-Komponente der Fliehkraft muss gegen die Gewichtskraft gerichtet sein und halb so groß sein.

$F_{Zy} = F_Z \sin\alpha = \frac{1}{2} G$ mit Rotationswinkel α

$$F_z = m\frac{v^2}{r}$$

Grundsätzlich ist diese Bedingung ab einer gewissen Mindestbahngeschwindigkeit (bzw. Winkelgeschwindigkeit oder unter einer gewissen Umlaufzeit) bei festem Radius r für alle höheren Geschwindigkeiten erfüllt, allerdings an anderen Punkten des Umlaufs.

Wähle *v* so, dass am höchsten Punkt des Riesenrads $F_Z = G$, also Schwerelosigkeit.

Dann ist bei α = 30° und α = 150°: sin α = 0,5 und somit $F_{Zy} = \frac{1}{2} F_Z = \frac{1}{2} G$ und die Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Setze $F_Z = G$ und berechne v

$$m\frac{v^2}{r} = m\,g$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{g\cdot r} = \sqrt{9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 67\,m} = 25{,}64\frac{m}{s}$$

A: Wenn Bahngeschwindigkeit 25,64 m/s beträgt, zeigt die Personenwaage an den zwei Punkten des Umlaufs, die jeweils 30° nach oben von der Waagerechten liegen, das halbe Gewicht an.

Andere Lösungen sind natürlich zulässig, diese ist wegen $\sin 30° = 0{,}5$ aber besonders einfach.

e) Angenommen, die gesamte Masse des Riesenrads stecke komplett in den 32 Gondeln, von denen jede 10 t wiegt. Berechne den Drehimpuls des Riesenrads.

$$L = J\cdot\omega$$

Trägheitsmoment einer Gondel: $J_G = m\cdot r^2 = 1\cdot 10^4\,kg\cdot(67\,m)^2 = 4{,}489\cdot 10^7\,kg\,m^2 = 4{,}489\cdot 10^7\,kg\,m^2$

Gesamtträgheitmoment: $J = 32\cdot J_G = 1{,}44\cdot 10^9\,kg\,m^2$

$$L = J\cdot\omega = 1{,}44\cdot 10^9\,N\,m\,s^2\cdot 3{,}88\cdot 10^{-3}\frac{1}{s} = 5{,}57\cdot 10^6\,N\,m\,s$$

A: Der Drehimpuls beträgt 5573 kNms.

f) Machen wir etwas Verrücktes: Packen wir den kompletten Drehimpuls des Riesenrads in das Rad eines Autos. Das Rad hat die Masse m = 20 kg und den Radius r = 30 cm.

(Trägheitsmoment Vollzylinder: $J=\frac{1}{2}m\,r^2$)

Berechne, wie schnell das Auto fährt.

Trägheitsmoment des Autorades: $J=\frac{1}{2}m\,r^2=\frac{1}{2}\cdot 20\,kg\cdot(0{,}3\;m)^2=0{,}9\;kg\,m^2$

Drehimpuls des Autorades ist gleich dem Drehimpuls des Riesenrads:

$L=J\cdot\omega=J\cdot\frac{2\pi}{T}$, damit ist $T=J\cdot\frac{2\pi}{L}$

$$T=2\pi\cdot 0{,}9\;kg\,m^2\cdot\frac{1}{5{,}57\cdot 10^6\,kg\,\frac{m^2}{s}}=1{,}01\cdot 10^{-6}\,s$$

Ein Umlauf des Autorades dauert 1 millionstel Sekunde.

Fahrstrecke des Rades bei einem Umlauf: $s_T=2\pi\,r=2\pi\cdot 0{,}3\,m=1{,}88\,m$.

Daraus die Geschwindigkeit: $v=\frac{s_T}{T}=1{,}88\frac{m}{1{,}01\cdot 10^{-6}\,s}=1{,}87\cdot 10^6\,\frac{m}{s}=1866\,\frac{km}{s}$

A: Das Auto würde sich mit der Geschwindigkeit von 1866 km/s bewegen.

Physik LK 11, 2. Klausur – Energie, Leistung, Impuls, Rotation – Lösung 22.02.2010

Aufgabe 3: Rückflug

Heathrow-Airport

Auch das schönste Wochenende ist einmal zuende. Das Flugzeug steht bereit für die Rückreise.

Doch beim Check vor dem Start springen die Triebwerke nicht an. Der Fehler ist einfach nicht zu finden.

Da erinnert sich die Pilotin an den Physikunterricht und denkt an die 300 Paar Schuhe im Laderaum.

a) Angenommen, man könnte alle 5 Sekunden ein Paar Schuhe mit der Masse von 800 g nach hinten aus dem Flugzeug werfen. Mit welcher Geschwindigkeit müsste man das tun, um nach Verbrauch aller Schuhe auf die Reisegeschwindigkeit von $v = 780\,km/h$ zu kommen? (Der Masseverlust ist zu vernachlässigen).

Es spielt keine Rolle, in welcher Zeit man die Schuhe hinauswirft. Entscheidend für die Rechnung ist, dass es alle Schuhe sind. Es kommt nur auf die Gesamtmasse an.

Masse aller Schuhe: $m_1 = 300 \cdot 0{,}8\,kg = 240\,kg$

Impulserhaltung:

$m_1 v_1 = m_2 v_2$ mit Masse $m_2 = 9000\,kg$ und $v_2 = 216{,}67\,\frac{m}{s}$ des Flugzeugs.

$$v_1 = m_2 \frac{v_2}{m_1} = 9000\,kg \cdot 216{,}67 \frac{\frac{m}{s}}{240}\,kg = 8125\,\frac{m}{s} = 29250\,\frac{km}{h}$$

A: Sie müsste die Schuhe mit einer Geschwindigkeit von ca. 30.000 km/h aus dem Flugzeug werfen.

b) Fehler gefunden, die Triebwerke kommen wieder in Gang. Allerdings steht zu Beginn nur die Leistung von $P=1\cdot10^6 W$ zur Verfügung. Alle fünf Minuten steigert sich die Leistung um $\Delta P=0,1\cdot10^6 W$ bis zur Maximalleistung von $P_{max}=1,7\cdot10^6 W$. Berechne die Zeit t, die unter diesen Umständen vergeht, bis das Flugzeug seine Reisehöhe von $h=9\,km$ und die Reisegeschwindigkeit von $v=780\,km/h$ erreicht hat.

P ist zeitabhängig. Stelle also eine Funktion für P(t) auf. Der Maximalwert wird nach $7\cdot5\,min=35\,min$ erreicht und erstmal vernachlässigt. Sollte das Ergebnis unter 35 min liegen, war diese Näherung zulässig.

$$P(t)=\frac{0,1\cdot10^6 W}{5\,min}\cdot t+1\cdot10^6 W=\frac{0,1\cdot10^6 W}{5\cdot60\,s}\cdot t+1\cdot10^6 W=333,33\frac{W}{s}\cdot t+1\cdot10^6 W$$

Es gilt $P=\dot{E}$ und somit

$$E=\int_0^{t1} P\,dt=\int_0^{t1}\left(333,33\frac{W}{s}\cdot t+1\cdot10^6 W\right)dt=\int_0^{t1}\left(333,33\frac{W}{s}\cdot t\right)dt+\int_0^{t1}1\cdot10^6 W\,dt$$

Die Energie ist aus Aufgabe 1 bekannt. $E=1,0\cdot10^9 J$

$$1,0\cdot10^9 J=333,33\frac{W}{s}\cdot\int_0^{t1} t\;dt=333,33\frac{W}{s}\cdot\frac{1}{2}t_1^2+1\cdot10^6 W\,t_1$$

Jetzt noch nach t_1 auflösen

$$1,0\cdot10^9 J=333,33\frac{W}{s}\cdot\frac{1}{2}t_1^2+1\cdot10^6 W\,t_1$$

$$\Leftrightarrow 166,67\frac{W}{s}t_1^2+1\cdot10^6 W\,t_1-1,0\cdot10^9 W\,s=0 \quad | : 166,67\text{ W s}$$

$$\Leftrightarrow t_1^2+6000\,s\cdot t_1-6\cdot10^6 s^2=0$$

Lösen mit p-q-Formel

Die negative Lösung ist physikalisch unplausibel, also:

$$t_1=-\frac{6000}{2}s+\sqrt{\left(\frac{6000}{2}s\right)^2+6,0\cdot10^6 s^2}$$

$$t_1=-3000\,s+\sqrt{3000^2 s^2+6,0\cdot10^6}$$

$$t_1=-3000\,s+3873\,s=873\,s=14,5\,min$$

A: Es dauert ca. 14 min.