Physik LK 11, Arbeitsblatt 10 – Differentialgleichungen – Lösung 21.04.10

Aufgabe 1: Einteilung von Differentialgleichungen

Untersuche die folgenden Differentialgleichungen auf Ordnung und Linearität

a) $y' = -y^2 + 2y - 4$ — 1. *Ordnung, nicht linear*
b) $y'' = -y' + 2y$ — 2. *Ordnung, linear*
c) $0 = y''^2 - 3y$ — 2. *Ordnung, nicht linear*
d) $y' = 0{,}02 \cdot y \cdot (5 - y)$ — 1. *Ordnung, nicht linear*

Aufgabe 2: Trennung der Variablen

Gib die Lösung der folgenden Differentialgleichungen mit $f(x) = y$ zu dem gegebenen Anfangswert an und überprüfe durch Einsetzen:

a) $y' = x \cdot y$ mit $f(0) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x\,y$ | $\cdot \frac{dx}{y}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = x\,dx$ | $\int$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int x\,dx$ | T

$\Leftrightarrow \ln(y) + c_1 = \frac{1}{2} x^2 + c_2$ | e^x, setze $c_3 = c_2 - c_1$

$\Leftrightarrow e^{\ln(y)} = e^{\frac{1}{2}x^2 + c_3}$ | T

$\Leftrightarrow y = e^{c_3} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ | setze $c = e^{c_3}$

$\Leftrightarrow y = c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

Anfangsbedingung $f(0) = 1$ einsetzen

$1 = c \cdot e^{\frac{1}{2}0^2} = c \cdot e^0 = c$, also

$\boldsymbol{f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}}$

b) $y = x \cdot y'$ mit $f(1) = 2$

$\Leftrightarrow y = x \frac{dy}{dx}$ | $\cdot \frac{dx}{x\,dy}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} dx = \frac{1}{y} dy$ | $\int$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{y} dy$

$\Leftrightarrow \ln x + c_1 = \ln y + c_2$ | $-c_1,\ c_3 = c_2 - c_1$

$\Leftrightarrow \ln x = \ln y + c_3$ | exp

$\Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{\ln y + c_3}$

$\Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{\ln y} \cdot e^{c_3}$ | $c = e^{c_3}$

$\Leftrightarrow x = y \cdot c$

$\Leftrightarrow y = \frac{x}{c}$

Anfangsbedingung $f(1) = 2$ einsetzen

$2 = \frac{1}{c} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$, also $y = \frac{x}{2^{-1}} = 2x$

$\boldsymbol{f(x) = 2x}$

c) $y' = -x y^2$ mit $f(1) = 2$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -x y^2 \quad | \quad \cdot \frac{dx}{y^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy = -x\,dx \quad | \quad \int$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int -x\,dx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} + c_1 = \frac{-1}{2} x^2 + c_2 \quad | \quad \cdot(-1), c_3 = c_1 - c_2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2} x^2 + c_3 \quad |^{-1}, \quad c_4 = 2 c_3$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2^{-1} x^2 + 2^{-1} c_4}$

$\Leftrightarrow y = \frac{2}{x^2 + c_4}$

Anfangsbedingung $f(1) = 2$ einsetzen

$2 = \frac{2}{1 + c_4} \Leftrightarrow c_4 = 0$, also $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{x^2}}$

d) $x = y \cdot y'$ mit $f(0) = 2$

$\Leftrightarrow x = y \cdot \frac{dy}{dx} \quad | \quad \cdot dx$

$\Leftrightarrow x\,dx = y\,dy \quad | \quad \int$

$\Leftrightarrow \int x\,dx = \int y\,dy$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} x^2 + c_1 = \frac{1}{2} y^2 + c_2 \quad | \quad -c_1 ; c_3 = c_2 - c_1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} y^2 + c_3 \quad | \quad \cdot(-2) ; + y^2 + x^2$

$\Leftrightarrow y^2 = x^2 - 2 c_3 \quad | \quad \sqrt{\;} ; c = -2c_3$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + c}$

Anfangsbedingung $f(0) = 2$ einsetzen

$2 = \sqrt{0 + c} \quad |^2$

$\Rightarrow 4 = c$, also

$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2 + 4}}$

e) $y' \cdot y = x^2 + 3$ mit $f(0) = 0$

$\Leftrightarrow y \frac{dy}{dx} = x^2 + 3 \quad | \quad \cdot dx$

$\Leftrightarrow y\,dy = x^2\,dx + 3\,dx \quad | \quad \int$

$\Leftrightarrow \int y\,dy = \int x^2\,dx + \int 3\,dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} y^2 + c_1 = \frac{1}{3} x^3 + c_2 + 3\mathrm{x} + c_3 \quad | \quad -c_1 ; c_4 = ..$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{3} x^3 + 3\mathrm{x} + c_4 \quad | \quad \cdot 2 ; c = 2 c_4$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{2}{3} x^3 + 6\mathrm{x} + c$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{2}{3} x^3 + 6\mathrm{x} + c}$

Anfangsbedingung $f(0) = 0$ einsetzen

$0 = \sqrt{\frac{2}{3} 0^3 + 0 + c} \Leftrightarrow c = 0$, also

$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{\frac{2}{3} x^3 + 6\mathrm{x}}}$

f) $y' = 0{,}2 \cdot y$ mit $f(0) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 0{,}2 \quad | \quad \cdot dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = 0{,}2\,dx \quad | \quad \int$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int 0{,}2\,dx$

$\Leftrightarrow \ln y + c_1 = 0{,}2\,x + c_2 \quad | \quad -_1, c_3 = c_2 - c_1$

$\Leftrightarrow \ln y = 0{,}2\,x + c_3 \quad |$ exp

$\Leftrightarrow y = e^{0{,}2\,x + c_3}$

Anfangsbedingung $f(0) = 1$ einsetzen

$1 = e^{0{,}2\,0 + c_3} \quad |$ ln

$\Leftrightarrow \ln 1 = c_3$

$\Leftrightarrow c_3 = 0$, also

$\boldsymbol{f(x) = e^{\frac{1}{5} x}}$

g) $y'=-0{,}1\,y$ mit $f(0)=2$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-0{,}1\,y \quad | \quad :0{,}1\,y\cdot dx$

$\Leftrightarrow \frac{10}{y}\,dy=-dx \quad | \quad \int$

$\Leftrightarrow \int \frac{10}{y}\,dy=\int -dx$

$\Leftrightarrow 10\left(\ln y+c_1\right)=-x+c_2 \quad | \quad -10\,c_1;\, c_3=c_2-10\,c_1$

$\Leftrightarrow 10\ln y=-x+c_3 \quad | \quad :10;\, c_4=\frac{c_3}{10}$

$\Leftrightarrow \ln y=-\frac{x}{10}+c_4$ | exp

$\Leftrightarrow y=e^{-0{,}1\,x+c_4}$

Anfangsbedingung $f(0)=2$ einsetzen

$\Leftrightarrow 2=e^{-0{,}1\,0+c_4}$ | ln

$\Leftrightarrow \ln 2=c_4$, damit $y=e^{-0{,}1\,x+\ln 2}$

$\Leftrightarrow y=e^{-0{,}1\,x}\cdot e^{\ln 2}$, also

$\boldsymbol{f(x)=2\cdot e^{-0{,}1\,x}}$

h) $y'=0{,}2(10-y)$ mit $f(0)=2$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=0{,}2(10-y) \quad | \quad :(10-y)\cdot dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(10-y)}\,dy=0{,}2\,dx \quad | \quad \int$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{(10-y)}\,dy=\int 0{,}2\,dx$

$\Leftrightarrow (-1)\cdot\ln(10-y)+c_1=0{,}2\,x+c_2 \quad | \quad -c_2;\ \cdot(-1)$

$\Leftrightarrow \ln(10-y)=-0{,}2\,x+c_3$ | exp $c_3=c_1-c_2$

$\Leftrightarrow 10-y=e^{-0{,}2\,x+c_3} \quad | \quad -10;\cdot(-1)$

$\Leftrightarrow y=10-e^{-0{,}2\,x+c_3}$

Anfangsbedingung $f(0)=2$ einsetzen

$\Leftrightarrow 2=10-e^{-0{,}2\cdot 0+c_3} \quad | \quad -10;\cdot(-1)$

$\Leftrightarrow e^{c_3}=8$ | ln

$\Leftrightarrow c_3=\ln 8$, einsetzen:

$y=10-e^{2x+\ln 8}=10-8\cdot e^{2x}$

$\boldsymbol{f(x)=10-8\cdot e^{-0{,}2\,x}}$

i) $y'=0{,}001\, y(10-y)$ mit $f(0)=1$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=0{,}001\, y(10-y)$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=0{,}001\, y(10-y)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{y(10-y)}dy=0{,}001\, dx$$

Dieses Integral lässt sich nur lösen, indem man den Bruch in eine Summe aufteilt. Dadurch kann man jeden Summanden einzeln integrieren. Formal geht das mit einer Partialbruchzerlegung. Hier schaffen wir das durch geschicktes Umformern auch so:

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y(10-y)}dy=\int 0{,}001\, dx$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{10}\frac{10-y+y}{y(10-y)}dy=\int 0{,}001\, dx$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{10}\frac{10-y+y}{y(10-y)}dy=\int 0{,}001\, dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}\int \frac{10-y}{y(10-y)}+\frac{y}{y(10-y)}dy=\int 0{,}001\, dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}\int \frac{1}{y}+\frac{1}{10-y}dy=\int 0{,}001\, dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}\left(\int \frac{1}{y}dy+\int \frac{1}{10-y}dy\right)=\int 0{,}001\, dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{10}-\frac{\ln(10-y)}{10}+c_1=0{,}001\, x+c_2$$
$$\Leftrightarrow \ln(y)-\ln(10-y)=0{,}01\, x+c_3$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(y)-\ln(10-y)}=e^{0{,}01x+c_3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^{\ln(y)}}{e^{\ln(10-y)}}=e^{0{,}01x}e^{c_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{10-y}=e^{0{,}01x}c_4$$
$$\Leftrightarrow \frac{y}{10-y}=e^{0{,}01x}c_4$$
$$\Leftrightarrow y=e^{0{,}01x}c_4(10-y)$$
$$\Leftrightarrow y=10e^{0{,}01x}c_4-ye^{0{,}01x}c_4$$
$$\Leftrightarrow y+ye^{0{,}01x}c_4=10e^{0{,}01x}c_4$$
$$\Leftrightarrow y\left(1+e^{0{,}01x}c_4\right)=10\, e^{0{,}01x}c_4$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{10e^{0{,}01x}c_4}{1+e^{0{,}01x}c_4}$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{10e^{0{,}01x}}{\frac{1}{c_4}+e^{0{,}01x}}$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{10e^{0{,}01x}}{c_5+e^{0{,}01x}}$$

Anfangsbedingung $f(0)=1$ einsetzen:

$$\Leftrightarrow 1=\frac{10e^{0{,}01\cdot 0}}{c_5+e^{0{,}01\cdot 0}}$$
$$\Leftrightarrow 1=\frac{10}{c_5+1}$$
$$\Leftrightarrow c_5+1=10$$
$$\Leftrightarrow c_5=9$$

einsetzen:

$$\Leftrightarrow y=\frac{10e^{0{,}01x}}{9+e^{0{,}01x}}$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{10}{9e^{-0{,}01x}+1}$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{10}{9\cdot e^{-0{,}01x}+1}}$$

<u>Aufgabe 3:</u> Radioaktive Strahlung

Durch den teilweisen Zerfall der strahlenden Substanz verringert sich die Stärke einer radioaktiven Strahlungsquelle mit der Zeit. Die Änderung dI der Intensität I ist für sehr kurze Zeitspannen dt proportional zu I und zu dt:

$$dI = -\lambda \cdot dt \cdot I$$

Die Proportionalitätskonstante λ nennt man Zerfallskonstante der strahlenden Substanz. Die relative Intensitätsänderung ist also

$$I'(t) = \frac{dI}{dt} = -\lambda I(t).$$

Isotop	λ/d^{-1}
Cs^{137}	0,023
J^{131}	0,085
Ra^{226}	$1{,}186 \cdot 10^{-6}$
U^{238}	$4{,}316 \cdot 10^{-13}$

Gib die Lösung I(t) für die nebenstehenden Isotope zu gegebenem Anfangswert I(0) = 100 an und berechne ihre Halbwertszeiten $t_{1/2}$ (= Zeit, nach der I auf die Hälfte abgesunken ist).

Lösen der DGL

$$\dot{I} = -\lambda I$$
$$\Leftrightarrow \frac{dI}{dt} = -\lambda I$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{I} dI = -\lambda\, dt \qquad | \int$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{I} dI = \int -\lambda\, dt$$
$$\Leftrightarrow \ln I + c_1 = -\lambda \int dt$$
$$\Leftrightarrow \ln I + c_1 = -\lambda t + c_2 \qquad |$$
$$c_3 = c_2 - c_1$$
$$\Leftrightarrow \ln I = -\lambda t + c_3 \qquad | \exp$$
$$\Leftrightarrow I = e^{-\lambda t + c_3}$$
$$\Leftrightarrow I = e^{-\lambda t} \cdot e^{c_3} \qquad | \quad c = e^{c_3}$$
$$\Leftrightarrow I = c\, e^{-\lambda t}$$

Anfangsbedingung $I(0) = 100$ einsetzen.

$$100 = c\, e^{-\lambda 0}$$
$$\Leftrightarrow c = 100$$, also

$\boldsymbol{I(t) = 100 \cdot e^{-\lambda t}}$ mit t in Tagen.

Isotop	$t_{1/2}$
Cs^{137}	30 Tage
J^{131}	8,1 Tage
Ra^{226}	1601 Jahre
U^{238}	4,4 Milliarden Jahre

Berechnung der Halbwertszeit:

$$\frac{I(0)}{2} = 100 \cdot e^{-\lambda t_{1/2}}$$
$$\Leftrightarrow 50 = 100 \cdot e^{-\lambda t_{1/2}} \qquad | :100$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}} \qquad | \ln$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{-\lambda t_{1/2}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{-\lambda t_{1/2}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{-\lambda t_{1/2}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda t_{1/2} \qquad | : (-\lambda)$$
$$\Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda}$$
$$\Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}^{-1}\right)}{\lambda}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}}$$