Physik LK 11, Lösung AB 08 – Integrieren, Kreiskräfte, Energieerhaltung 06.01.10

Aufgabe 1:

Ein Rennwagen schafft es, seine Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit nach folgender Formel zu steigern: $v(t)=3\frac{1}{s}a_0 t^2$.

Stelle die Bewegungsgleichungen für $s(t)$ und für $a(t)$ auf.

$$s(t)=\int v(t)\,dt \qquad s(t)=a_0\frac{1}{s}t^3$$

$$a(t)=\dot{v} \qquad a(t)=6a_0\frac{1}{s}t$$

Aufgabe 2:

Ein Besatzungsmitglied von Captain Futures Mannschaft ist entführt worden. Der Weltraumheld muss das Lösegeld innerhalb von 3 Tagen zum Marsmond Deimos bringen.

Captain Future mit Raumschiff „Comet“

Captain Future selbst befindet sich auf dem Erdmond. Sein Raumschiff kann konstant mit 4 g (1 g = 10 m/s²) beschleunigen oder bremsen.

a) Ist es überhaupt möglich, dass Captain Future das Lösegeld rechtzeitig abliefern kann?
(Abstand Erdmond-Deimos zu diesem Zeitpunkt:
d = 0,5 AE, 1 AE = 1,5 10⁸ km)

Damit die Geschwindigkeit beim Marsmond Deimos wieder Null beträgt, kann das Schiff nur über die halbe Strecke beschleunigen, die andere Hälfte wird abgebremst.

$$s=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t_H=\sqrt{\frac{2d/4}{a}}=\sqrt{\frac{7{,}5\cdot 10^{10}m}{40\,m/s^2}}=4{,}33\cdot 10^4\,s \Rightarrow t_H \approx 12\,Stunden$$

Das Abbremsen dauert genauso lange, also braucht Captain Future etwa einen Tag. Er würde es rechtzeitig schaffen.

b) Wie so oft gehen die Dinge nicht glatt. Exakt nach halber Strecke tritt ein Triebwerksschaden auf. Captain Future bremst sofort. Aber die volle Bremsleistung wird nicht sofort erreicht, sondern steigert sich nur langsam, und zwar um 0,216 g pro Stunde.

i) Welche Geschwindigkeit v_{max} hat das Raumschiff, wenn der Triebwerksschaden einsetzt?

$$v_{max}=a\cdot t=40\frac{m}{s^2}\cdot 4{,}33\cdot 10^4\,s=1{,}73\cdot 10^6\frac{m}{s}\approx 6{,}2\cdot 10^6\,km/h$$

Die maximale Geschwindigkeit beträgt etwa 6,2 Mio km/h.

ii) Stelle eine Gleichung auf, welche die Bremsbeschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt (ohne Berücksichtigung des Maximalwerts von 4 g).

$$a(t)=2{,}16\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{60\cdot 60\,s}t=6\cdot 10^{-4}\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{s}\cdot t=a_0\frac{1}{s}\cdot t$$

iii) Zu welchem Zeitpunkt t_B ist die maximale Bremsbeschleunigung erreicht?

$$t_B=\frac{4\,g}{0{,}216\,g}\cdot 1\,h=18{,}5\,h=6{,}7\cdot 10^4\,s$$

Die maximale Beschleunigung ist nach 18,5 h erreicht.

iv) Wie viel Prozent der Maximalgeschwindigkeit hat die Comet noch, wenn die maximale Bremsbeschleunigung erreicht ist?

Es gilt $a=\dot{v}=\ddot{s}$ *, damit* $v(t)=\int a(t)\,dt$

$a(t)=a_0\frac{1}{s}\cdot t$ *, damit*

$$v(t)=\frac{1}{2}\cdot a_0\frac{1}{s}t^2$$

$$v_B=\frac{1}{2}a_0\frac{1}{s}t_B^2=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10^{-4}\frac{m}{s^2}\frac{1}{s}(6{,}7\cdot 10^4\,s)^2=1{,}35\cdot 10^6\frac{m}{s}$$

$$v_2=v_{max}-v_B=1{,}73\cdot 10^6\frac{m}{s}-1{,}35\cdot 10^6\frac{m}{s}=3{,}8\cdot 10^5\frac{m}{s}$$

Die Geschwindigkeit beträgt noch 22% der Maximalgeschwindigkeit.

v) Wird Captain Future unter diesen Bedingungen das Lösegeld abliefern können? (Schafft er es, dass Raumschiff rechtzeitig abzubremsen?) Begründung ohne exakte Rechnung genügt!

Auf der ersten Hälfte des Weges hat Captain seine Geschwindigkeit bis v_{max} *gesteigert. Ab jetzt nimmt die Geschwindigkeit ab, aber langsamer als sie zuvor zugenommen hat. Seine Geschwindigkeit beim Bremsen ist also immer höher, als sie zuvor beim Beschleunigen war, er legt also mehr Weg in der gleichen Zeit zurück. Damit ist er 12 h nach Einleiten des Bremsmanövers schon über Deimos hinausgeschossen. Ob er umkehren könnte und es dann noch schafft, muss nicht berücksichtigt werden.*

Physik LK 11, Lösung AB 08 – Integrieren, Kreiskräfte, Energieerhaltung 06.01.10

Aufgabe 3:

Aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie:

Show mit menschlicher Kanonenkugel

*Die **menschliche Kanonenkugel** ist eine Zirkusattraktion bei der eine Person mit Hilfe einer Feder oder mit Druckluft n die Luft geschossen wird. Menschliche Kanonenkugeln haben Geschwindigkeiten von bis zu 100 km/h erreicht. Die Person landet auf einem horizontalen Netz oder einem Luftkissen, dessen Lage nach den Gesetzen der klassischen Mechanik bestimmt wird.*

Die größte Reichweite einer menschlichen Kanonenkugel beträgt 56,54 Meter. Sie wurde von David Smith senior am 29. Mai 1998 aufgestellt. Es wird geschätzt, dass David Smith bei diesem Schuss eine Spitzengeschwindigkeit von 112 km/h erreicht hat.

Es ist ein Abschusswinkel von 45° zu berücksichtigen. Die Reibung ist zu vernachlässigen.

a) Angenommen, statt Druckluft würde man eine gespannte Feder (Federweg 8 m) zum Abschuss benutzen. Wie groß wäre die Federkonstante dieser Feder, wenn David Smith (78 kg) damit eine Abschussgeschwindigkeit von 112 km/h erreicht?

Beim Abschuss ist die komplette Spannenergie in kinetische Energie umgewandelt worden. Also $E_{sp}=E_{kin}$.

$$\frac{1}{2}Ds^2=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow D=\frac{mv^2}{s^2}=\frac{78\,kg\cdot\left(31{,}11\,\frac{m}{s}\right)^2}{(8\,m)^2}=1179{,}63\,\frac{kg}{s^2}$$

Die Federkonstante würde 1180 kg/s² betragen.

b) An welcher Stelle würdet ihr das Luftkissen aufstellen, wenn man nur die theoretischen Vorgaben beachtet? Warum weicht dieser Wert vermutlich vom tatsächlichen Weltrekord ab?

$$s_w=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{\left(31{,}11\,\frac{m}{s}\right)^2\cdot\sin(90°)}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}=98{,}66\,m$$

Man würde das Luftkissen in 99 m Entfernung aufstellen. Wegen der vernachlässigten Reibung ist dieser Wert aber deutlich zu groß.

c) Wie groß ist die Gesamtenergie des Systems? (Die Reibung ist zu vernachlässigen).

Die gesamte Energie steckt zu Beginn in der Spannenergie oder direkt nach dem Abschuss in der kinetischen Energie.

$$W_{kin} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 78\,kg \cdot (31{,}11\,\frac{m}{s})^2 = 37745\,J$$

Die Gesamtenergie beträgt 37,7 kJ.

d) An einem bestimmten Punkt der Flugbahn ist die Lageenergie maximal.

i) Wie viel Prozent anfänglichen Spannenergie ist in diesem Punkt in Lageenergie umgewandelt worden?

Dieser Punkt ist der Scheitelpunkt der Flugbahn. Die Lageenergie errechnet sich aus der Höhe dieses Punktes.

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2\,g} = 24{,}67\,m$$

$$E_{pot} = m\,g\,h = 78\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 24{,}67\,m = 18873\,J$$

Die Hälfte der Gesamtenergie ist in Lageenergie umgewandelt worden.

ii) Wo steckt die restliche Energie?

Im Scheitelpunkt hat David Smith noch kinetische Energie.

iii) Wie groß ist die Geschwindigkeit von David Smith in diesem Punkt?

Energieansatz (es geht auch über den schrägen Wurf):

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m\,v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2 \frac{E_{kin}}{m}} = 22\,\frac{m}{s.}$$

David Smith hat im höchsten Punkt der Flugbahn eine Geschwindigkeit von 79 km/h.

<u>Aufgabe 4:</u>

Eine Achterbahn in den USA

Wer kennt sie nicht, die Fahrt auf der Achterbahn? Dort wirken wechselnde Kräfte auf den Fahrgast die den besonderen „Thrill“ bringen und manchmal auch zum Wechsel der Gaderobe zwingen.

Der Betreiber einer Achterbahn wirbt mit dem Slogan: „Höhere g-Kräfte als bei einem Raketenstart“.

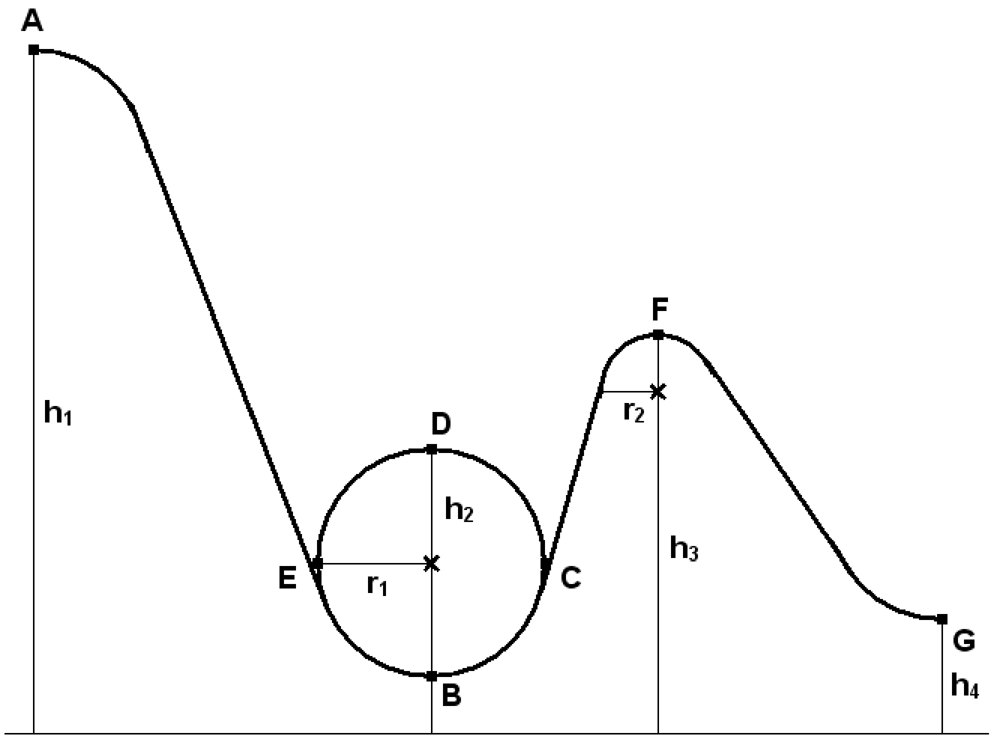
Das entscheidende Teilstück dieser Achterbahn ist auf der folgenden Seite abgebildet.

Die Reibung ist für die folgenden Aufgaben zu vernachlässigen!

Hinweis: Die Ergebnisse sind nicht ganz realistisch für eine echte Achterbahn.

Der Wagen startet mit 0 km/h in Punkt A und durchfährt nacheinander die Punkte B, C, D, E, am Ende des Loopings wieder B, dann F und schließlich G.

Die Konstruktionsmaße der Achterbahn sind:
$h_1 = 48$ m $h_2 = 20$ m $h_3 = 28$ m $h_4 = 8$ m $r_1 = 8$ m $r_2 = 4$ m



a) In welchem Punkt treten diese höchsten g-Kräfte auf?

In Punkt B, weil dort die Gegenkraft zur Zentripetalkraft und die Gewichtskraft zusammen wirken.

b) Wie groß sind die Kräfte die maximal auf einen Fahrgast (75 kg) wirken? Sagt der Betreiber mit seinem Slogan die Wahrheit? (Nehmen wir 11 g bei einem Raketenstart an).

$F_z = m \frac{v^2}{r}$ *v errechnet sich aus der Energieerhaltung.*

Errechnen der Höhe von Punkt B:

$h_B = h_2 - 2 \cdot r_1 = 4\,m$

Errechnen des Höhenunterschieds zwischen A und B:

$h = h_1 - h_b = 48\,m - 4\,m = 44\,m.$

$\frac{1}{2} m v^2 = m\,g\,h \Rightarrow v^2 = 2\,g\,h = 2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 44\,m = 863{,}28 \frac{m^2}{s^2}$ $\quad v = 29{,}38 \frac{m}{s} = 105{,}77 \frac{km}{h}$

$$F_z = m \frac{v^2}{r} = 75\,kg \frac{863{,}28 \frac{m^2}{s^2}}{8\,m} = 8093{,}95\,kg \frac{m}{s^2} = 8{,}1\,kN$$

$G = m\,g = 75\,kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} = 735{,}75\,N$.

F_z und G wirken in die gleiche Richtung, daher gilt für die Kraft

$F_{ges} = G + F_z = 735{,}75 + N\,8093{,}25\,N = 8829\,N = 8{,}8\,kN.$

$\frac{F_{ges}}{G} = 12$.

Es wirkt die 12-fache Gewichtskraft auf den Fahrgast. Der Betreiber hat nicht gelogen.

c) Sind diese g-Kräfte für alle Fahrgäste gleich groß? Begründe!

Sie sind für alle Fahrgäste gleich groß, denn beim Quotienten $\frac{(G + F_z)}{G}$ ***kürzt sich die Masse heraus.***

d) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit des Wagens? In welchem Punkt wird diese Geschwindigkeit erreicht? Begründe!

In diesem System werden Lageenergie und Bewegungsenergie ineinander umgewandelt. Die maximale Lageenergie ist in Punkt A. Die minimale Lageenergie ist in Punkt B. In diesem Punkt hat sich also die meiste ursprünglich vorhandene Lageenergie in kinetische Energie umgewandelt.

Die Geschwindigkeit ist in Punkt B am größten und beträgt 102 km/h (siehe oben).

e) Ab und zu spricht man sogar von „negativen g-Kräften“ (entgegen der Erdanziehung).

i) In welchen Punkten können diese Kräfte prinzipiell auftreten? Begründe!

Negative g-Kräfte können prinzipiell in den Punkten D und F auftreten, da dort die Gegenkraft zur Zentripetalkraft der Gewichtskraft genau entgegen wirkt. Ist sie größer als die Gewichtskraft treten diese negativen g-Kräfte auf.

ii) Berechne in welchem Punkt die negativen g-Kräfte am größten sind.

Berechnung für Punkt D: *Errechnen des Höhenunterschieds zwischen A und D:*

$$h=h_1-h_2=48\,m-20\,m=28\,m.$$

$$\frac{1}{2}m\,v^2=m\,g\,h\Rightarrow v^2=2\,g\,h=2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 28\,m=549{,}36\frac{m^2}{s^2}$$

$$F_z=m\frac{v^2}{r}=75\,kg\frac{549{,}36\frac{m^2}{s^2}}{8\,m}=5150{,}25\,kg\frac{m}{s^2}=5{,}2\,kN$$

$$G=735{,}75\,N\quad.$$

F_z und G wirken in die entgegengesetzt daher gilt für die Kraft

$$F_{ges}=G-F_z=735{,}75\,N-5150{,}25\,N=-4414{,}5\,N=-4{,}4\,kN.\qquad \frac{F_{ges}}{G}=-6\quad.$$

Berechnung für Punkt F: Errechnen des Höhenunterschieds zwischen A und F :

$$h=h_1-h_3=48\,m-28\,m=20\,m.$$

$$\frac{1}{2}m\,v^2=m\,g\,h\Rightarrow v^2=2\,g\,h=2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 20\,m=392{,}4\frac{m^2}{s^2}$$

$$F_z=m\frac{v^2}{r}=75\,kg\frac{392{,}4\frac{m^2}{s^2}}{4\,m}=7357{,}5\,kg\frac{m}{s^2}=7{,}4\,kN$$

$$G=735{,}75\,N\quad.$$

F_z und G wirken in die entgegengesetzt daher gilt für die Kraft

$$F_{ges}=G-F_z=735{,}75\,N-7357{,}5\,N=-6621{,}75\,N=-6{,}6\,kN.\qquad \frac{F_{ges}}{G}=-9\quad.$$

Die größten negativen g-Kräfte treten mit -9 g in Punkt F auf.

f) Man kann die Achterbahn so konstruieren, dass der sich der Fahrgast an bestimmten Punkten schwerelos fühlt. Ändere die Konstruktionsmaße der Achterbahn so, dass diese Schwerelosigkeit in einem Punkt auftritt. Benenne diesen Punkt und begründe deine Konstruktionsänderung mit einer Rechnung.

Es muss ein Punkt sein, in dem sich Zentripetalkraft und Gewichtskraft gegenseitig aufheben können, sie müssen also entgegengesetzt wirken. Dies ist in den Punkten D und F möglich. Dort muss gelten:

$F_z = G \Leftrightarrow m\frac{v^2}{r} = m\,g \Leftrightarrow \frac{v^2}{r} = g$ *oder anders ausgedrückt: Zentripetalbeschleunigung und Ortsfaktor müssen gleich groß sein. Angewendet auf Punkt D:*

$\frac{{v_D}^2}{r_1} = g$ *v_D: Geschwindigkeit im Punkt D*

Entscheidend ist also nun, dass man zu einem gewählten Radius die genau passende Geschwindigkeit erhält.

${v_D}^2 = g \cdot r_1$ *Belassen wir r_1 bei 8 m, so ergibt sich*

$${v_D}^2 = 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 8\,m = 78{,}48\,\frac{m^2}{s^2} \Rightarrow v_D = 8{,}86\,\frac{m}{s}$$

In Punkt D muss der Wagen also genau diese Geschwindigkeit haben. Und die Geschwindigkeit hängt von der Höhe ab, wo der Wagen startet. Wir suchen also die genau passende (neue) Höhe für Punkt A. Entscheidend dabei ist der Höhenunterschied zwischen Punkt A und D, also h_1-h_2. Diesen neuen Höhenunterschied nennen wir h_D

E_{pot} (im Punkt A) = E_{kin} (im Punkt D) - E_{pot} (im Punkt D)

$$m\,g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2} m\,{v_D}^2 \Leftrightarrow 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot h_D = \frac{1}{2} 78{,}48\,\frac{m^2}{s^2} \Rightarrow h_D = \frac{78{,}48\,\frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = 4\,m$$

Der Höhenunterschied darf nur 4 m betragen. Belassen wir die Höhe von Punkt D gleich, so ergibt sich eine neue Höhe für Punkt A von 24 m.

Man erreicht einen Moment der Schwerelosigkeit in Punkt D, wenn man die Höhe von Punkt A von 48 m auf 24 m reduziert.

Viele andere Lösungen sind möglich. Man kann genauso Radius und Höhenunterschied verändern oder so konstruieren, dass Schwerelosigkeit in Punkt F herrscht.