

**I 1. Spaß mit natürlichen Exponentialfunktionen II**

Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = \frac{4x}{e^x} + 1$  und  $g(x) = x + e^{-\frac{x}{2}}$

Untersuchen Sie beide Funktionen auf: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Grenzwertverhalten, Extrempunkte und Wendepunkte. Falls eine der Gleichungen analytisch nicht lösbar sein sollte, versuchen Sie eine Näherung zu finden. Begründen Sie Ihre Aussagen mit Rechnungen.

Lösung:

1. Funktionsuntersuchung

$f(x) = \frac{4x}{e^x} + 1$	$g(x) = x + e^{-\frac{x}{2}}$
-----------------------------	-------------------------------

Ableitungen:

$f(x) = \frac{4x}{e^x} + 1 = 4x \cdot e^{-x} + 1$ <p>Anwendung Produktregel:</p> $f'(x) = 4e^{-x} - 4xe^{-x} = -4e^{-x}(x-1)$ $f''(x) = -4e^{-x} - (4e^{-x} - 4xe^{-x})$ $= -4e^{-x} - 4e^{-x} + 4xe^{-x} = -8e^{-x} + 4xe^{-x}$ $= \frac{(4x-8)}{e^x} = \frac{4(x-2)}{e^x}$ $f'''(x) = 8e^{-x} + 4e^{-x} - 4xe^{-x} = 12e^{-x} - 4xe^{-x}$ $= \frac{(-4x+12)}{e^x} = \frac{-4(x+3)}{e^x}$	<p>Anwendung Additionsregel und Kettenregel:</p> $g'(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ $g''(x) = 0 - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}$ $g'''(x) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}$
--	--

Schnittpunkte Koordinatenachsen:

<p>y-Achse: <math>f(x) = \frac{4 \cdot 0}{e^0} + 1 = 1 \quad S_{yf}(0 1)</math></p> <p>x-Achse: NST bestimmen</p> $0 = \frac{4x_n}{e^{x_n}} + 1 \Leftrightarrow -1 = \frac{4x_n}{e^{x_n}} \Leftrightarrow -e^{x_n} = 4x_n$ $\Leftrightarrow e^{x_n} = -4x_n \Leftrightarrow x_n = \ln(-4x_n)$ <p>Die Gleichung ist analytisch nicht lösbar.</p>	<p>y-Achse: <math>g(0) = 0 + e^{-\frac{0}{2}} = 1 \quad S_{yg}(0 1)</math></p> <p>x-Achse: NST bestimmen</p> $0 = x_n + e^{-\frac{x_n}{2}} \Leftrightarrow -x_n = e^{-\frac{x_n}{2}} \Leftrightarrow \ln(-x_n) = -\frac{x_n}{2}$ <p>Die Gleichung ist analytisch nicht lösbar.</p> <p><math>\ln(x)</math> hat nur eine Nullstelle. Die gesuchte</p>
---	---

<p><math>\ln(x)</math> hat nur eine Nullstelle. Die gesuchte Nullstelle <math>x_n</math> muss negativ sein, falls es sie gibt, denn <math>-4x_n</math> muss positiv sein.</p> <p><math>f(-0,205) = -0,0065705533</math>  <math>f(-0,203) = +0,0052411558</math></p> <p>Also <math>x_1 \approx -0,204</math></p> <p><b><math>S_{xf}(-0,204 0)</math></b></p>	<p>Nullstelle <math>x_n</math> muss negativ sein, falls es sie gibt, denn <math>-x_n</math> muss positiv sein.</p> <p><math>g(-10) = 138,41316</math>  <math>g(-5) = 7,182494</math>  <math>g(-2) = 0,71828183</math>  <math>g(-1,5) = 0,61700002</math>  <math>g(-1,2) = 0,6221188</math>  <math>g(-1) = 0,64872127</math>  <math>g(-0,2) = 0,90517092</math>  <math>g(-0,1) = 0,9512711</math></p> <p>Offenbar gibt es bei <math>x_E \approx -1,5</math> ein Minimum der Funktion, aber die x-Achse wird nie erreicht.</p> <p>Also: <b><math>g</math> hat keine NST.</b></p>
---	--

Grenzwertverhalten:

<p><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x}{e^x} + 1 \right) = 0 + 1 = 1,</math></p> <p>weil der Faktor mit der e-Funktion dominiert.</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x}{e^x} + 1 \right) = -\infty,</math></p> <p>weil <math>e^x</math> dominiert und gegen unendlich läuft.  <math>4x</math> verursacht das negative Vorzeichen.</p>	<p><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + e^{-\frac{x}{2}} \right) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} x \right) + 0 = \infty,</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + e^{-\frac{x}{2}} \right) = \infty,</math></p> <p>weil der Summand mit der e-Funktion dominiert, obwohl der Summand <math>x</math> gegen <math>-\infty</math> läuft.</p>
---	---

Extrempunkte:

<p>Notwendige Bedingung: <math>f'(x_E) = 0</math></p> <p><math>0 = -4e^{-x_E}(1 - x_E)</math> Betrachte Faktoren einzeln:</p> <p><math>-4e^{-x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}</math>  <math>0 = 1 - x_E \quad   +x_E</math>  <math>\Leftrightarrow x_2 = 1</math></p> <p>Hinreichende Bedingung: <math>f''(x_E) \neq 0</math></p> <p><math>f''(1) = (1^2 - 2 \cdot 1 - 2) \cdot e^{-1} = -\frac{3}{e} &lt; 0,</math></p> <p>also Maximum</p> <p><math>f(1) = \frac{4 \cdot 1}{e^1} + 1 = \frac{4}{e} + 1 \approx 2,4715</math></p> <p><b>Maximum <math>E_1(1 2,47)</math></b></p>	<p>Notwendige Bedingung: <math>g'(x_E) = 0</math></p> <p><math>0 = 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x_E}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{x_E}{2}} = 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{x_E}{2}} = 2</math>  <math>\Leftrightarrow -\frac{x_E}{2} = \ln(2) \Leftrightarrow x_3 = -2 \ln(2) \approx -1,3863</math></p> <p>Hinreichende Bedingung: <math>g''(x_3) \neq 0</math></p> <p><math>g''(-2 \ln(2)) = \frac{1}{4}e^{-\frac{-2 \ln(2)}{2}} = \frac{1}{4} \cdot e^{\ln(2)} = \frac{1}{2} &gt; 0,</math></p> <p>also Minimum</p> <p><math>g(-2 \ln(2)) = -2 \ln(2) + e^{-\frac{-2 \ln(2)}{2}}</math>  <math>= -2 \ln(2) + 2 \approx 0,6137</math></p> <p><b>Minimum <math>E_2(-1,39 0,61)</math></b></p>
---	--

Wendepunkte:

Notwendige Bedingung:  $f''(x_W)=0$

$$0 = \frac{4(x_W - 2)}{e^x}$$

Betrachte Faktoren einzeln:  $e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$0 = 4(x_W - 2) \Rightarrow x_W = 2$$

Hinreichende Bedingung:  $f'''(x_W) \neq 0$

$$f'''(2) = \frac{-4(2+3)}{e^2} = \frac{-24}{e^2} < 0 \quad \text{o.k.}$$

$$f(2) = \frac{4 \cdot 2}{e^2} + 1 = \frac{8}{e^2} + 1 \approx 2,0827$$

**Wendepunkt  $W_1(2|2,08)$**

Notwendige Bedingung:  $g''(x_W)=0$

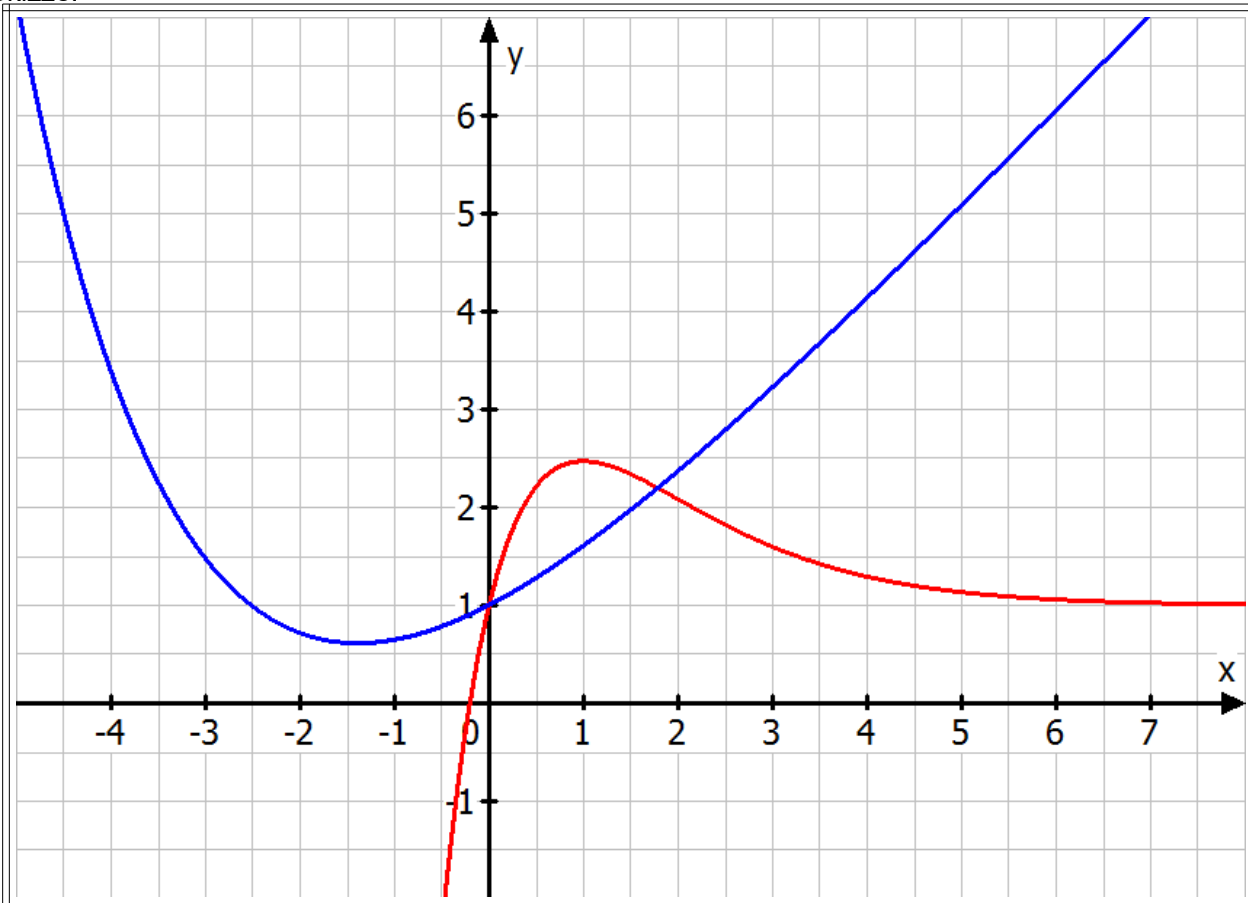
$$0 = \frac{1}{4} e^{-\frac{x_W}{2}}$$

$$e^{-x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Also:

**g hat keine Wendestellen.**

Skizze:



Stammfunktion von  $f(x) = \frac{4x}{e^x} + 1 = 4xe^{-x} + 1$

$$\int f(x) dx = \int 4xe^{-x} + 1 dx = \int 4xe^{-x} dx + \int 1 dx = \left( \int 4xe^{-x} dx \right) + x + C_1$$

$$\int 4xe^{-x} dx = -4xe^{-x} - \int -4e^{-x} dx = -4xe^{-x} - 4e^{-x} + C_2 = -4e^{-x} \cdot (x+1) + C_2$$

Also  $\int f(x) dx = -4e^{-x} \cdot (x+1) + x + C = -4e^{-x} - 4xe^{-x} + x + C = e^{-x}(xe^x - 4x - 4) + C$  q.e.d.

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der Waagerechten  $y=1$  endlich ist und berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

Hier ist ein Fehler in der Aufgabenstellung: Es fehlt die Einschränkung „im ersten Quadranten“.

Differenzfunktion  $h(x) = f(x) - 1$  Gesucht wäre dann die Fläche von 0 bis unendlich zwischen  $h(x)$  und der  $x$ -Achse.

$$\int_0^{\infty} h(x) dx = \int_0^{\infty} 4xe^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(0) = \lim_{b \rightarrow \infty} (-4xe^{-x} - 4e^{-x} + C) - (-4 \cdot 0 \cdot e^{-0} - 4e^{-0} + C) = 4$$

Aber ohne Einschränkung auf den ersten Quadranten gilt: Wegen  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  ist auch  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$  und dann ist auch  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = -\infty$  und damit ist die Fläche nicht endlich.

Der Graph von  $g$ , die  $y$ -Achse und die Geraden  $y=2$  und  $x_0=2$  begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie den Flächeninhalt. (Kontrollergebnis:  $A \approx 0,7358 F.E.$ )

Hier liegt ein Fehler in der Aufgabenstellung bzw. im Kontrollergebnis vor. (in Bewertung berücksichtigt)

$$h(x) = g(x) - 2$$

Nullstelle von  $h(x)$ :

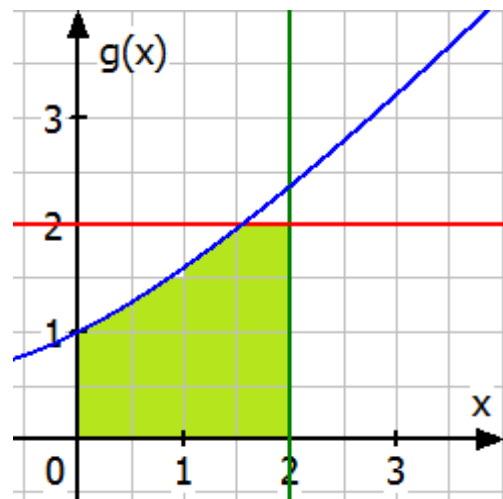
$$0 = x_n + e^{-\frac{x_n}{2}} - 2 \Leftrightarrow 2 - x_n = e^{-\frac{x_n}{2}}$$

Die Gleichung ist analytisch nicht lösbar.

$$h(1,53) = -0,004666069$$

$$h(1,54) = 0,0030130683$$

Also  $x_n \approx 1,535$



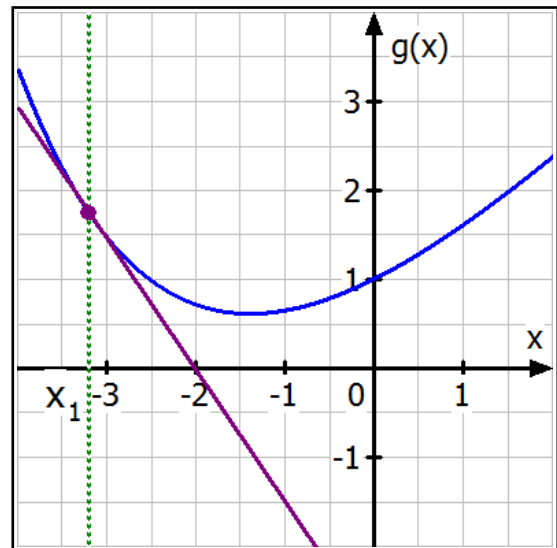
$$A_1 = \left| \int_0^2 h(x) dx \right| = \left| \int_0^2 x + e^{-\frac{x}{2}} - 2 dx \right| = \left| \frac{1}{2}(x^2 - e^{-x}) - 2x \right|_0^2 = |-2,7357 - (-2)| = 0,7358 F.E.$$

$$A_2 = \left| \int_{1,535}^2 h(x) dx \right| = \left| \int_{1,535}^2 x + e^{-\frac{x}{2}} - 2 dx \right| = \left| \frac{1}{2}(x^2 - e^{-x}) - 2x \right|_{1,535}^2 = |-2,7357 - (-2,8202)| = 0,0845 F.E.$$

$$A = A_1 - A_2 = 0,7358 F.E. - 0,0845 F.E. = 0,6513 F.E.$$

**A: Der Flächeninhalt beträgt 0,65 F.E.**

Der Graph von  $g$  hat an der Stelle  $x_1$  eine Tangente mit negativer Steigung, welche im Punkt  $(-2|0)$  die  $x$ -Achse schneidet. Leiten Sie eine Gleichung her, deren Lösung  $x_1$  ist und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich.



Stelle Gleichungen auf, welche die Situation beschreiben:

1. Der Punkt  $(x_1|y_1)$  liegt auf dem Graphen von  $f$ .

$$I. \quad y_1 = x_1 + e^{-\frac{x_1}{2}}$$

2. Der Punkt  $(x_1|y_1)$  liegt auf dem Graphen der Tangente.

$$II. \quad y_1 = mx_1 + n$$

3. Der Punkt  $(-2|0)$  liegt auf dem Graphen der Tangente.

$$III. \quad 0 = m \cdot (-2) + n \Leftrightarrow n = 2m$$

4. Die momentane Steigung von  $g$  an der Stelle  $x_1$  ist  $m$ .

$$IV. \quad m = 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x_1}{2}}$$

Das macht vier Unbekannte  $(x_1; y_1; m; n)$  und vier Gleichungen. Für die Aufgabe muss man nun die vier Gleichungen so zusammenfassen, dass  $x_1$  als einzige Unbekannte übrig bleibt.

Setze I und II gleich und setze gleichzeitig IV für  $m$  und III für  $n$  ein:

$$\begin{aligned} x_1 + e^{-\frac{x_1}{2}} &= \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x_1}{2}}\right) \cdot x_1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x_1}{2}}\right) \quad | \quad T \quad \text{Jetzt nur noch vereinfachen} \\ \Leftrightarrow x_1 + e^{-\frac{x_1}{2}} &= x_1 - \frac{1}{2}x_1 e^{-\frac{x_1}{2}} + 2 - e^{-\frac{x_1}{2}} \quad | \quad -x_1 + \frac{1}{2}x_1 e^{-\frac{x_1}{2}} + e^{-\frac{x_1}{2}} \\ \Leftrightarrow 2e^{-\frac{x_1}{2}} + \frac{1}{2}x_1 e^{-\frac{x_1}{2}} &= 2 \quad | \quad T \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{x_1}{2}} \cdot (4 + x_1) &= 2 \quad | \quad \cdot 2 \\ \Leftrightarrow e^{-\frac{x_1}{2}} \cdot (4 + x_1) &= 4 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man weder analytisch lösen noch weiter vereinfachen.

## I 2. Gebrochen rationale Funktionsschar

Gegeben ist die Funktionsschar  $f_t(x) = \frac{x-t}{x^2-t}; t \in \mathbb{R}; t \geq 0$

Zeigen Sie:

- $f_1(x)$  ist streng monoton fallend für alle  $x$  im Definitionsbereich. (Hinweis: Der Index ist 1 und nicht  $t$ ).
- $f_t$  hat zwei Polstellen für  $t \neq 1$ .
- Die Punkte  $(0|1)$  und  $(1|1)$  befinden sich auf allen Graphen von  $f_t$  für alle  $t \in \mathbb{R}; t > 0$
- Es gibt keine weiteren gemeinsamen Punkte.

Lösung:

$$f_1(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \text{ ist streng monoton fallend:}$$

Ableitung mit Quotientenregel:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2-1) - (x-1) \cdot (2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-1) - 2x^2 + 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 1}{(x^2-1)^2} = \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{(x^2-1)(x^2-1)} \\ &= \frac{-(x-1)^2}{(x+1)(x-1)(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \quad \forall x \in D \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

$$f_t(x) = \frac{x-t}{x^2-t} \text{ hat zwei Polstellen für } t \neq 1.$$

NST Zähler:  $x_1 = t$ , NST Nenner:  $x_{2/3} = \pm \sqrt{t}$

Für  $t \neq 1$  gilt:  $t \neq \pm \sqrt{t}$ . Also lassen sich für  $t \neq 1$  die NST-Terme nicht kürzen und es gibt zwei NST des Nenners, die nicht NST des Zählers sind, und damit gibt es zwei Polstellen für  $t \neq 1$ . q.e.d.

Punkte auf Graphen:

$$(0|1) \text{ in } f_t(x) \text{ einsetzen: } 1 = \frac{0-t}{0^2-t} = \frac{-t}{-t} = 1 \text{ q.e.d.}$$

$$(1|1) \text{ } f_t(x) \text{ einsetzen: } 1 = \frac{1-t}{(-1)^2-t} = \frac{1-t}{1-t} = 1 \text{ q.e.d.}$$

Es gibt keine weiteren gemeinsamen Punkte:

Sei  $h \neq 0 \in \mathbb{R}$ . Suche Schnittpunkte von  $f_t(x)$  und  $f_{t+h}(x)$ :

$$\begin{aligned} f_t(x_s) &= f_{t+h}(x_s) \\ \frac{x_s-t}{x_s^2-t} &= \frac{x_s-(t+h)}{x_s^2-(t+h)} \quad | \cdot (x_s^2-t) \cdot (x_s^2-t-h) \\ \Leftrightarrow (x_s-t)(x_s^2-t-h) &= (x_s^2-t)(x_s-t-h) \\ \Leftrightarrow x_s^3 - t x_s - h x_s - t x_s^2 + t^2 + t h &= x_s^3 - t x_s - h x_s^2 - t x_s + t^2 + t h \quad | - x_s^3 \\ \Leftrightarrow -t x_s - h x_s - t x_s^2 + t^2 + t h &= t x_s - h x_s^2 - t x_s + t^2 + t h \end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung, die maximal zwei Lösungen haben kann. Da die beiden Lösungen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 0$  bereits bekannt sind, kann es keine weitere Lösung geben. q.e.d.

**II 1. Spaß mit Kaugummis**

Kaugummiautomatenhersteller haben es heutzutage nicht leicht. Ihr Produkt entspricht einfach nicht mehr dem Zeitgeist. Also muss man sich etwas neues einfallen lassen.

Die Lösung: Man kombiniert ein Gewinnspiel mit dem Kaugummiverkauf. Laut Angaben des Herstellers enthalten 2,8% aller Kaugummis einen harten Plastikkern, auf dem ein Gewinncode gedruckt ist. (Es gibt Gerüchte, dass diese Aktion von der Zahnarztvereinigung beeinflusst wurde).

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über den Inhalt eines Automaten mit 1000 Kaugummis nach Angaben des Herstellers.

Typ	Erdbeere	Himbeere	Zitrone	Blaubeere	Mint	Kokos	Cola	Gewinn
Farbe	rot	rosa	gelb	blau	grün	weiß	schwarz	alle
Anzahl	200	100	122	150	100	50	250	28

Die „Gewinnkaugummis“ haben eine zufällige Farbe. Von 28 Gewinnkaugummis sind also im Mittel jeweils 4 Kaugummis rot, rosa, gelb, blau, grün, weiß oder schwarz.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Gewinncodeverteilung nach Angaben des Herstellers. Es wurden 10.000 Gewinnkaugummis hergestellt.

Gewinn	Gutschein für einmal Kaugummi-ziehen	Modellauto „Fiat Panda“	Gutschein für eine Kariesbehandlung (nur ein Zahn)	Wochendende in Landkern (ohne Reisekosten)	Fiat Panda (gebraucht)
Anzahl	9.000	800	195	4	1

Für 10 Cent erhält man ein Kaugummi am Automaten.

**II 1.1** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

**A** ein gezogenes Kaugummi vom Typ „Erdbeere“ ist.

$$P(\text{Erdbeere}) = \frac{200}{1000} = 20\%$$

**B** ein gezogenes Kaugummi rot ist.

$$P(\text{rot}) = \frac{200+4}{1000} = 20,4\%$$

**C** von 100 gezogenen Kaugummis genau 20 Kaugummis vom Typ „Mint“ sind.

$$P(X=20) = \binom{100}{20} \cdot 0,1^{20} \cdot 0,9^{80} = 1,1710 \cdot 10^{-3}$$

**D** von 100 gezogenen Kaugummis höchstens 20 Kaugummis vom Typ „Mint“ sind.

$$P(X \leq 20) = F_{100;0,1}(20) = 0,9992 = \mathbf{99,9\%}$$

**E** von 100 gezogenen Kaugummis mindestens 20 Kaugummis vom Typ „Mint“ sind.

$$P(X \geq 20) = 1 - F_{100;0,1}(19) = 0,0020 = \mathbf{0,2\%}$$

**F** von 100 gezogenen Kaugummis zwischen 5 und 15 Kaugummis vom Typ „Mint“ sind.

$$P(5 \leq X \leq 15) = F_{100;0,1}(15) - F_{100;0,1}(4) = 0,9601 - 0,0237 = 0,9364 = \mathbf{93,64\%}$$

**G** man beim Ziehen von 7 Kaugummis mindestens einmal ein Modellauto gewinnt.

$$P(\text{Modellauto}) = \frac{28}{1000} \cdot \frac{800}{10000} = \frac{7}{3125}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3118}{3125}\right)^4 = 1 - 0,9911 = 0,008930 = \mathbf{0,89\%}$$

**H** man beim Ziehen von 30 Kaugummis kein Gewinnkaugummi zieht.

$$P(X = 0) = \left(\frac{972}{1000}\right)^{30} = 0,4266 = \mathbf{42,66\%}$$

**J** man beim Ziehen von 100.000.000 Kaugummis mindestens 12.000 Gewinnkaugummis zieht.

$$P(X = 12000) = \mathbf{0\%}, \text{ weil nur 10.000 Gewinnkaugummis hergestellt wurden.}$$

## II.1.2 Berechnen Sie

**K** die Wahrscheinlichkeit, dass ein weißes Kaugummi ein Gewinnkaugummi ist.

Von 1000 Kaugummis sind 54 Kaugummis weiß und davon 4 Kaugummis Gewinnkaugummis.

$$P_{\text{weiß}}(\text{Gewinn}) = \frac{4}{54} = \mathbf{0,0741} = \mathbf{7,41\%}$$

**L** die Anzahl von Kaugummis, die man mindestens ziehen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% ein Gewinnkaugummi dabei ist.

$$P(\text{Gewinnkaugummi}) = \frac{28}{1000}$$

$$\begin{aligned} F_{n;0,028}(1) \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{972}{1000}\right)^n \geq 0,99 \\ \Leftrightarrow -\left(\frac{972}{1000}\right)^n &\geq -0,01 \quad | \cdot (-1) &\Leftrightarrow 0,972^n \leq 0,01 \quad | \ln() &\Leftrightarrow \ln(0,972^n) \leq \ln(0,01) \\ \Leftrightarrow n \cdot \ln(0,972) &\leq \ln(0,01) \quad | : \ln(0,972) &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,972)} \geq 162,1569 > 162 \end{aligned}$$

**A: Man muss mindestens 163 Kaugummis ziehen.**



**M** den Bereich, in dem die Anzahl von schwarzen Kaugummis mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt, wenn man 1000 Kaugummis zieht.

$$P(\text{schwarz}) = \frac{254}{1000}$$

$$\mu = np = \frac{254}{1000} \cdot 1000 = 254$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot 0,254 \cdot 0,746} = \sqrt{189,484} = 13,7632$$

$$P(\mu - 1,96 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1,96 \cdot \sigma) = 0,95$$

$$P(254 - 26,9800 \leq X \leq 254 + 26,9800) = 0,95$$

$$P(227,0200 \leq X \leq 280,9800) = 0,95$$

Aus Tabelle:  $P(227 \leq X \leq 280) = 0,9500$

**A: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,00% sind es zwischen 227 und 280 schwarze Kaugummis.**

**II 1.3** Die folgende Teilaufgabe beschäftigt sich mit dem Verdacht, dass die Herstellerangaben Verteilung der Kaugummis falsch sein könnten.

Eine Stichprobe beim Ziehen von 200 Kaugummis ergibt folgendes Ergebnis:

Typ	Erdbeere	Himbeere	Zitrone	Blaubeere	Mint	Kokos	Cola	Gewinn
Farbe	rot	rosa	gelb	blau	grün	weiß	schwarz	alle
Anzahl	55	24	32	22	22	15	22	8

Entwickeln Sie mit Hilfe der Signaregeln jeweils ein Entscheidungskriterium für die Annahme oder Ablehnung der folgenden Hypothesen bei einem Signifikanzniveau von 5%.

Bewerten Sie die anschließend Hypothesen anhand der obigen Stichprobe.

**N** Die Herstellerangaben zum Anteil der Erdbeer-Kaugummis sind richtig

$$\mu = np = 200 \cdot 0,2 = 40 \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 5,6569$$

$$I = [\mu - 1,96 \sigma ; \mu + 1,96 \sigma] = [28,91 ; 51,09]$$

Der Annahmebereich liegt also im Intervall  $A = [29; 51]$ .

**Anhand der Stichprobe (X=55) wird die Hypothese abgelehnt.**

**O** Die Herstellerangaben zum Anteil der Zitronen-Kaugummis sind falsch.

Betrachte Gegenhypothese:

$$\mu = np = 200 \cdot 0,122 = 24,4 \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0,122 \cdot 0,878} = 4,6285$$

$$I = [\mu - 1,96 \sigma ; \mu + 1,96 \sigma] = [15,33 ; 33,47]$$

Der Annahmebereich für die Gegenhypothese liegt also im Intervall  $A = [16; 33]$ .

**Anhand der Stichprobe (X=32) wird die Gegenhypothese angenommen, also die Hypothese abgelehnt.**

**P** Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für Gewinnkaugummi ist höchstens 1,5%.

Rechtsseitiger Test :  $\mu = np = 200 \cdot 0,015 = 3$      $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0,015 \cdot 0,985} = 1,7190$   
 $I = [\mu; \mu + 1,64 \cdot \sigma] = [0; 5,82]$  Der Annahmebereich liegt also im Intervall  $A = [0; 5]$ .

**Anhand der Stichprobe (X=8) wird die Hypothese abgelehnt.**

**Q** Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für ein grünes Kaugummi liegt zwischen 8% und 12%.

Suche Annahmebereiche für  $p \geq 8\%$  und  $p \leq 12\%$ .

$p \geq 8\%$ : Linksseitiger Test. :  $\mu = np = 200 \cdot 0,08 = 16$   
 $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0,08 \cdot 0,92} = 3,8367$   
 $I = [\mu - 1,64 \cdot \sigma; 200] = [9,71; 200]$

Der Annahmebereich liegt also im Intervall  $A = [17; 200]$ .

$p \leq 12\%$ : Rechtsseitiger Test. :  $\mu = np = 1000 \cdot 0,12 = 120$   
 $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0,12 \cdot 0,88} = 12,2762$   
 $I = [0; \mu + 1,64 \cdot \sigma] = [0; 136,85]$  Der Annahmebereich liegt also im Intervall  $A = [0; 136]$ .

Der Annahmebereich für die Grundhypothese liegt somit im Intervall  $A = [17; 136]$ .

**Anhand der Stichprobe (X=24) wird die Hypothese angenommen.**

Weitere Arbeitsaufträge:

**R** Beschreiben Sie die möglichen Testfehler, die bei solchen Tests begangen werden können.

*Fehler 1. Art (alpha-Fehler): Die Hypothese wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist.*

*Fehler 2. Art (beta-Fehler): Die Hypothese wird angenommen, obwohl sie falsch ist.*

**S** Berechnen Sie den Fehler 2. Art für Hypothese N für den Fall, dass die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für ein Erdbeerkaugummi bei 25% liegt.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Trefferzahl bei für ein Erdbeerkaugummi zwischen 29 und 51 liegt (dem Annahmebereich der Hypothese  $p=0,2$ ), wenn die tatsächliche Wahrscheinlichkeit 25% beträgt.

$$\beta = P(29 \leq X \leq 51) = F_{200;0,25}(51) - F_{200;0,25}(28) = 0,6017 - 0,0001 = 0,6016 = \mathbf{60,16\%}$$

**Der Beta-Fehler beträgt in diesem Fall 60,16%.**

**T** Berechnen Sie auf Grundlage der Stichprobe das Intervall, in dem sich die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für ein Blaubeerkaugummi mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% befindet.

$$I = \left[ h - c \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}; h + c \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \right] \quad \text{mit } h = \frac{X}{n} = \frac{22}{200} = 0,11, \quad c = 2,58 \text{ für } 99\%.$$

$$I = [0,0529; 0,1671]$$

**Mit einer Sicherheit von 99% liegt die tatsächliche Wahrscheinlichkeit zwischen 5,29% und 16,71%.**