Mathematik LK M1/M2, 4. Kursarbeit – Stochastik I – Lösung 14.05.2018

Aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie:

Die **Europäische Union** (**EU**) ist ein Verbund von derzeit 28 Mitgliedstaaten. Außerhalb von Europa umfasst die EU auch einige Überseegebiete. Sie hat insgesamt mehr als eine halbe Milliarde Einwohner. Gemessen am Bruttoinlandsprodukt ist der EU-Binnenmarkt der größte gemeinsame Wirtschaftsraum der Erde. Die EU stellt eine eigenständige Rechtspersönlichkeit dar und hat daher Einsichts- und Rederecht bei den Vereinten Nationen.

Der Anhang auf der letzten Seite zeigt eine Tabelle der 28 Mitgliedstaaten. Die Daten aus diesem Anhang dienen als Grundlage zur Lösung einiger der folgenden Aufgaben.

Aufgabe 1: Treffen der Gründungsmitglieder

Gegründet wurde die EU als Europäische Wirtschaftsgemeinschaft (EWG). Am 25. März 1957 wurde die EWG mit der Unterzeichnung der Römischen Verträge durch Belgien, Frankreich, Italien, Luxemburg, die Niederlande und die Bundesrepublik Deutschland gegründet.

Die Regierungschefs der sechs Gründungsmitglieder treffen sich im Pub „The Dubliners" in Straßburg. Um sich bei den anderen Gästen beliebt zu machen, geben Sie zwei Lokalrunden aus. Bei jeder Runde wird zufällig bestimmt, wer bezahlen muss. Allerdings ist ausgeschlossen, dass ein Regierungschef zweimal bezahlen muss.

1.1 Zeichne einen vollständigen Baum für dieses Zufallsexperiment auf dem nächsten Blatt.

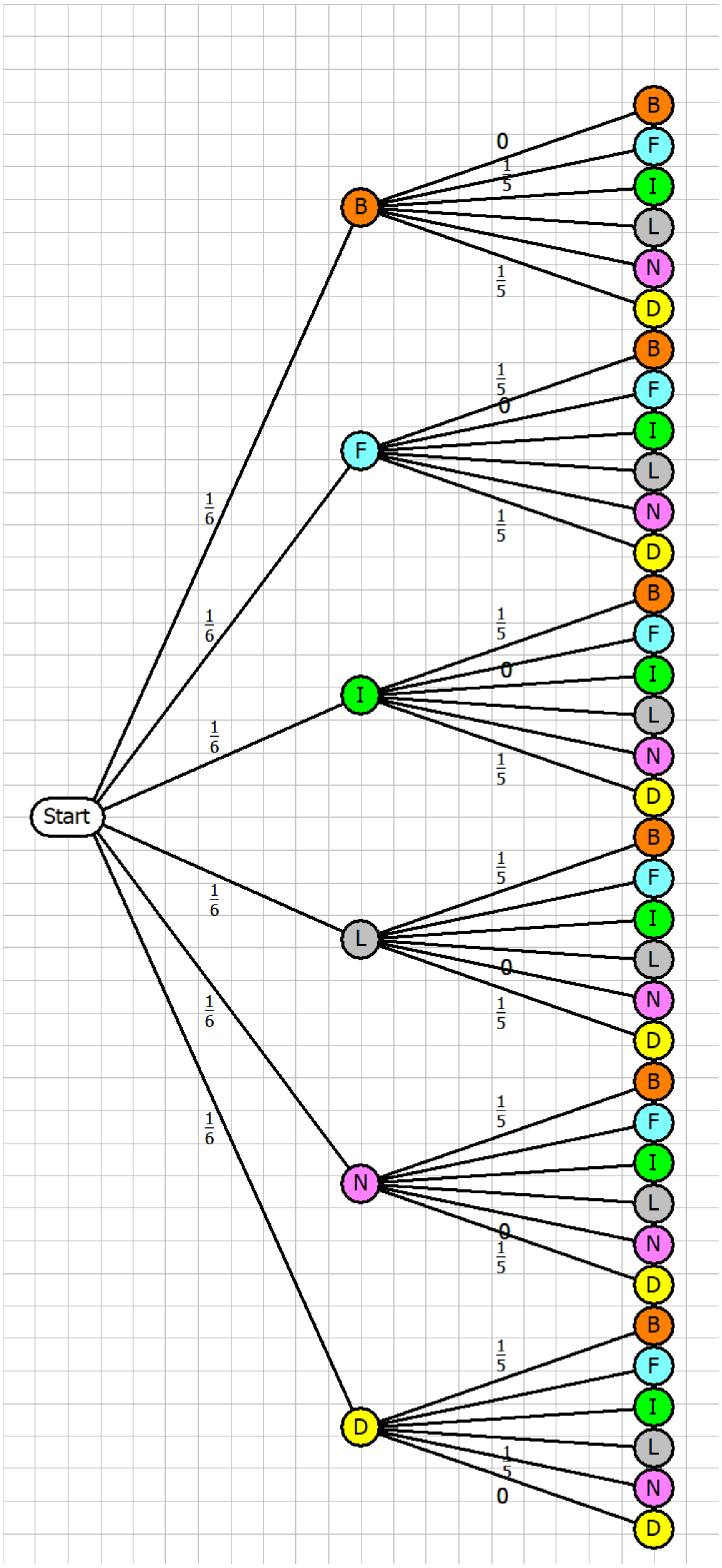
siehe nächste Seite (alle Pfade ohne Wahrscheinlichkeit mit 1/5)

1.2 Erläutere auf der nächsten Seite den Unterschied zwischen "Ergebnis" und "Ereignis". Benenne jeweils ein Beispiel, dass zu diesem Zufallsexperiment passt.

Ein Ergebnis ist ein möglicher Ausgang eines Zufallsexperiments. Alle möglichen Ergebnisse bilden die Ergebnismenge. Eine Teilmenge der Ergebnismenge heißt Ereignis.

Ein Beispiel für ein Ergebnis wäre „Zuerst zahlt Deutschland, dann Luxemburg“.

Ein Beispiel für ein Ereignis wäre „Es zahlen nur Benelux-Staaten“.


Start
B
F
I
L
N
D
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{5}$
0

1.3 Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass...

Nr.	Aufgabe	Lösung
1.3.1	...Deutschland nicht bezahlen muss.	$\frac{2}{3}=66{,}67\,\%$
1.3.2	...Frankreich und Deutschland bezahlen.	$\frac{2}{30}=6{,}67\,\%$
1.3.3	...Belgien die zweite Runde bezahlen muss.	$\frac{5}{30}=16{,}67\,\%$
1.3.4	...beide Runde von den Benelux-Staaten bezahlt werden. (siehe ggf. Anhang Seite 10)	$\frac{1}{5}=20\,\%$
1.3.5	...die erste Runde von einem Staat bezahlt wird, der an einem Meer liegt und die zweite Runde von einem Nachbarstaat von Frankreich bezahlt wird. (siehe ggf. Anhang Seite 10)	$\frac{17}{30}=56{,}67\,\%$

Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Benutze die Tabelle im Anhang. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass...

Nr.	Aufgabe	Lösung
2.1	...ein zufällig ausgewählter Bürger der EU ein Deutscher ist.	**16,2%**
2.2	...ein zufällig ausgewählter Bürger der EU aus einem Land mit mehr als 60 Millionen Einwohnern kommt.	**53,97%**
2.3	...sich ein zufällig ausgewählter Ort in der EU nicht in Frankreich befindet.	**85.82%**
2.4	...von zwei zufällig ausgewählter Bürgern der EU beide aus den Benelux-Staaten kommen. (siehe ggf. Anhang Seite 10)	**0,32%**
2.5	...ein zufällig ausgewähler Mitgliedsstaat ein Bruttoinlandsprodukt pro Kopf aufweist, dass höher als der EU-Durchschnitt ist. (Beachte die letzte Spalte der Tabelle im Anhang).	$\frac{11}{28}=39.29\,\%$
2.6	...von zwei zufällig ausgewählen (unterschiedlichen) Mitgliedsstaaten genau ein Mitgliedstaat ein Bruttoinlandsprodukt pro Kopf aufweist, dass höher als der EU-Durchschnitt ist.	$\frac{187}{378}=49{,}47\,\%$
2.7	...von zwei zufällig ausgewählen (unterschiedlichen) Mitgliedsstaaten mindestens ein Mitgliedstaat ein Bruttoinlandsprodukt pro Kopf aufweist, dass höher als der EU-Durchschnitt ist.	$\frac{121}{189}=64{,}02\,\%$
2.8	...von fünf zufällig ausgewählen (unterschiedlichen) Mitgliedsstaaten höchstens ein Mitgliedstaat mit dem Buchstaben "S" anfängt.	$1-\frac{23\cdot 22\cdot 21\cdot 20}{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}$ $=56{,}75\,\%$
2.9	...von 26 zufällig ausgewählen (unterschiedlichen) Mitgliedsstaaten kein Mitgliedsstaat ein Inselstaat im Mittelmeer ist. (siehe ggf. Anhang Seite 10)	$1-\frac{2}{28}\cdot\frac{1}{27}=0{,}26\,\%$

Aufgabe 3: **Kombinatorik**

Löse die Aufgabe auf diesem Aufgabenblatt. Trage den Lösungsterm und die Lösung in die Tabelle ein. Aufgabe 3.0 zeigt ein prinzipielles Beispiel (nicht aus der Kombinatorik).

3.0	*In einem Korb liegen fünf Äpfel, zwei Birnen, drei Melonen und zwei Autoreifen. Berechne die Anzahl der Früchte im Korb.*	*5+2+3*	*10*

Bei einem Treffen der europäischen Rates ist der Regierungschef aus jedem der 28 Mitgliedsstaaten anwesend. Frau Merkel (die deutsche Regierungchefin) ist schon ganz nervös, denn sie weiß nicht was die anziehen soll. In ihrem Schrank gibt es 5 Hosen, 4 Paar Schuhe und 6 Oberteile.

Nr.	Aufgabe	Term	Lösung
3.1	Berechne, auf wie viele verschiedene Arten sie sich kleiden kann, wenn man davon ausgeht, dass alle Kleidungsstücke auch modisch zusammenpassen. (Außerdem gehen wir davon aus, dass sie von jeder Art Kleidung ein Teil trägt).	$5\cdot4\cdot6$	**120**

Nr.	Aufgabe	Term	Lösung
3.2	Frau Merkel konnte sich dann doch für ein Kleidungsstück entscheiden und fliegt zu dem Treffen. Die Abgeordneten werden nacheinander vom Präsident des europäischen Rates begrüßt. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, die es für die Besetzung der ersten drei Plätze bei der Ankunft gibt.	$28\cdot27\cdot26$	**19.656**

Unter den Regierungschefs gibt es drei Frauen und 25 Männer. Es soll ein Gruppenfoto gemacht werden. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, die es gibt, die 28 Personen in einer Reihe aufzustellen, wenn...

Nr.	Aufgabe	Term	Lösung
3.3	...wenn es keine Einschränkungen gibt	$28!$	$\mathbf{3{,}05\cdot10^{29}}$
3.4	...wenn die Frauen nebeneinander stehen sollen	$26!\cdot3!$	$\mathbf{2{,}42\cdot10^{27}}$
3.5	...die Männer nebeneinander stehen sollen	$4!\cdot25!$	$\mathbf{3{,}72\cdot10^{26}}$
3.6	...Frau Merkel und Herr Macron unbedingt nebeneinander stehen wollen.	$27!\cdot2!$	$\mathbf{2{,}18\cdot10^{28}}$
3.7	...Frau May und Frau Merkel auf gar keinen Fall nebeneinander stehen wollen.	$28!-27!\cdot2!$	$\mathbf{2{,}83\cdot10^{29}}$

Für die abendliche Präsentation der Ergebnisse sollen fünf Regierungschefs ausgewählt werden. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, diese Präsentationsgruppe zu bilden, wenn...

Nr.	Aufgabe	Term	Lösung
3.8	...wenn es keine Einschränkungen gibt	$\binom{28}{5}$	**98.280**
3.9	...mindestens eine Frau präsentieren soll.	$\binom{3}{1}\binom{25}{4}+\binom{3}{2}\binom{25}{3}+\binom{3}{3}\binom{25}{2}$	**45.150**
	...Frau Merkel, Herr Macron und Frau May nicht gleichzeitig präsentieren sollen.	$\binom{28}{5}-\binom{25}{2}$	**97.980**

Nach dem anstrengenden Fotoshooting geht es zum Abendessen. Für das Abendessen stehen Gruppentische zur Verfügung. Berechne, auf wie viele Arten man die 28 Regierungschefs auf die Tische aufteilen kann, wenn...

3.10	... es einen Achtertisch, einen Neunertisch und einen Elfertisch gibt.	$\binom{28}{8}\cdot\binom{20}{9}\cdot\binom{11}{11}$	$\mathbf{5{,}22\cdot 10^{11}}$
3.11	...wenn es einen Achtertisch und zwei Zehnertische gibt.	$\binom{28}{8}\cdot\binom{20}{10}\cdot\binom{10}{10}\cdot\frac{1}{2!}$	$\mathbf{2{,}87\cdot 10^{11}}$

Aufgabe 4: Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Satz von Bayes

Nr.	Aufgabe	Term / Rechnung	Lösung
4.1.	Bei einer Reihenuntersuchung für eine Immunschwächekrankheit kommt ein Test zum Einsatz, der mit 99%iger Wahrscheinlichkeit ein positives Ergebnis liefert, wenn der Proband infiziert ist (Sensitivität des Tests) und mit 98%iger Wahrscheinlichkeit negativ ausfällt, wenn der Proband gesund ist (Spezifizität des Tests). Statistische Erhebungen haben ergeben, dass 0,1% der Bevölkerung infiziert sind.		
4.1.1	Ein Mann erfährt nach der Teilnahme am Test von seinem positiven Ergebnis. Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Mann tatsächlich infiziert ist.	Ereignis A: Infiziert $P(A)=0{,}001$ Ereignis B: Test pos. $P(B)=0{,}99\cdot 0{,}001+0{,}02\cdot 0{,}999=0{,}02097$ $P_A(B)=0{,}99$ $P_B(A)=\frac{P_A(B)\cdot P(A)}{P(B)}=\frac{0{,}99\cdot 0{,}001}{0{,}02097}$	**4,72%**
4.1.2	Der Mann unterzieht sich nach dem ersten Test noch einem zweiten Test mit gleicher Sensitivität und Sensibilität. Berechne die veränderte Wahrscheinlichkeit, dass der Mann infiziert ist, wenn auch der zweite Test positiv ausfällt.	Ereignis A: Infiziert $P(A)=0{,}0472$ Ereignis B: Test pos. $P(B)=0{,}99\cdot 0{,}0472+0{,}02\cdot 0{,}9528=1003/3000=0{,}06578$ $P_A(B)=0{,}99$ $P_B(A)=\frac{0{,}99\cdot 0{,}0472}{0{,}06578}$	**71,04%**

4.2. **4.2.1** **4.2.2** **4.2.3**	In einem oberbayerischen Touristenort befinden sich zur Hochsaison viermal so viele Touristen wie Einheimische. 60% der Touristen tragen einen Tirolerhut, abe nur 20% der Einheimischen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Person in dem Ort keinen Tirolerhut trägt. Ich frage eine Person <u>mit</u> Tirolerhut nach dem Weg. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person ein Einheimischer ist. Ich frage eine Person <u>ohne</u> Tirolerhut nach dem Weg. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person ein Einheimischer ist.	Ereignis A: Einheimischer $P(A)=0{,}2$ Ereignis B: Hutträger $P_A(B)=0{,}2$ $P(B)=0{,}2\cdot 0{,}2+0{,}8\cdot 0{,}6$ $=0{,}52$ $P_B(A)=\frac{0{,}2\cdot 0{,}2}{0{,}52}=0{,}07692$ $P_{\overline{B}}(A)=\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}8\cdot 0{,}4}$ $=\frac{1}{3}$	**48%** **7,69%** $\mathbf{\frac{1}{3}}$
4.3	Mehrere Mathematik-Leistungskurse schreiben gleichzeitig eine Kursarbeit. Das Thema Stochastik erscheint leicht, also haben sich nur 10% der Schüler ordentlich auf die Arbeit vorbereitet. Das Ergebnis ist verheerend. Links und rechts Fünfen und Sechsen. Von den fleißigen Schülern haben nur 5% eine dieser Noten, während von je 20 Schülern mit diesen Noten nur einer zu den Fleißigen gehört. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein fauler Schüler die Note Fünf oder Sechs erhält.	Ereignis A: vorbereitet $P(A)=0{,}1$ Ereignis B: 5 oder 6 $P_A(B)=0{,}05$ $P(B)=0{,}1\cdot 0{,}05+0{,}9\cdot x$ $P_B(A)=\frac{1}{20}$ $P_B(A)=\frac{P_A(B)\cdot P(A)}{P(B)}$ $\frac{1}{20}=\frac{0{,}05\cdot 0{,}1}{0{,}1\cdot 0{,}05+0{,}9\cdot x}$ $20=\frac{0{,}005+0{,}9\cdot x}{0{,}005}$ $0{,}1=0{,}005+0{,}9\cdot x$ $0{,}0995=0{,}9x$ $0{,}1056=x$	**10,56%**

<u>Aufgabe 5:</u> Beweise zu den Binomialkoeffizienten $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$

Es sei $n,k\in\mathbb{N};k\le n$ und $0!=1$. Beweise oder widerlege die folgenden mathematischen Aussagen:

<u>5.1</u> $\binom{n}{0}=1=\binom{n}{n}$ Bew.: $\boldsymbol{\binom{n}{0}}=\frac{n!}{(n-0)!\cdot 0!}=\frac{n!}{n!\cdot 1}=\mathbf{1}=\frac{n!}{n!\cdot 0!}=\frac{n!}{n!\cdot(n-n)!}=\boldsymbol{\binom{n}{n}}$ q.e.d.

<u>5.2</u> $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ Bew.: $\boldsymbol{\binom{n}{k}}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\boldsymbol{\binom{n}{n-k}}$ q.e.d.

<u>**5.3**</u> $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}^{*}$ Bew.:

$$\boldsymbol{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}$$
$$=\frac{(k+1)n!}{(k+1)k!(n-k)!}+\frac{(n-k)n!}{(n-k)(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{(n-k)n!}{(n-k)!(k+1)!}$$
$$=\frac{(k+1)n!+(n-k)n!}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{n!((k+1)+(n-k))}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))!(k+1)!}$$
$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}=\boldsymbol{\binom{n+1}{k+1}} \text{ q.e.d.}$$

* Das ist der Beweis, dass die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck stehen.

<u>Aufgabe 6:</u> Bernoulli-Ketten

Wir kennen noch keine Bernoulli-Ketten. Das soll uns nicht davon abhalten, damit zu rechnen.
15 Schüler schreiben eine Kursarbeit. Alle haben Spickzettel dabei. Die Erfahrung zeigt, dass im Schnitt nur 20% der Schüler mit Spickzettel auch erwischt werden.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass...

<u>**6.1**</u> ...genau vier Schüler erwischt werden.

Experiment mit 15 Stufen mit Zurücklegen (für jeden Schüler die gleiche Chance, erwischt zu werden).

Der Baum enthält pro Stufe zwei Ergebnis mit
$P(erwischt)=20\%$ und $P(Schwein\,gehabt)=80\%.$

vier erwischt: Ein günstiger Pfad enthält viermal 20% und elfmal 80% Wahrscheinlichkeiten, also
$P(ein\,günstiger\,Pfad)=0{,}2^4\cdot 0{,}8^{11}$

Wie viele Pfade gibt es? Auf 15 Pfadpositionen muss viermal die 0,2 verteilt werden. Es gibt also $\binom{15}{4}$ Pfade. Damit $P(vier\,erwischt)=\binom{15}{4}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^{11}=1365\cdot 0{,}0016\cdot 0{,}085899=0{,}1876$

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier Schüler erwischt werden, liegt bei 18,76%.

<u>**6.2**</u> ...genau *k* Schüler erwischt werden.

Gleiche Überlegung wie bei 6.1 führt zu: $\boldsymbol{P(k\,erwischt)=\binom{15}{k}\cdot 0{,}2^k\cdot 0{,}8^{15-k}}$

<u>6.3</u> ...höchsten zwei Schüler erwischt werden.

$$\begin{aligned}P(\textit{höchstens}\,2) &= P(0\,\textit{erwischt}) + P(1\,\textit{erwischt}) + P(2\,\textit{erwischt})\\ &= \binom{15}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^{15-0} + \binom{15}{1}\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^{15-1} + \binom{15}{2}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^{15-2}\\ &= 0{,}0352 + 0{,}1319 + 0{,}2309 = 0{,}3980 = \mathbf{39{,}80}\,\%\end{aligned}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei Schüler erwischt werden, liegt bei 39,80%.

<u>6.4</u> ...zwischen vier und sechs Schüler erwischt werden.

$$\begin{aligned}P(\textit{zwischen}\,4\,\textit{und}\,6) &= P(4\,\textit{erwischt}) + P(5\,\textit{erwischt}) + P(6\,\textit{erwischt})\\ &= \binom{15}{4}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^{15-4} + \binom{15}{5}\cdot 0{,}2^5\cdot 0{,}8^{15-5} + \binom{15}{6}\cdot 0{,}2^6\cdot 0{,}8^{15-6}\\ &= 0{,}1876 + 0{,}1031 + 0{,}0430 = 0{,}3337 = \mathbf{33{,}37}\,\%\end{aligned}$$

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen vier und sechs Schüler erwischt werden, liegt bei 33,37%.

Anhang: EU-Mitgliedsstaaten (Auszug aus Wikipedia)

Staat	Bevölkerung 2017[3]	Fläche in km²[4]	BIP Mrd. Euro 2016[5]	BIP pro Kopf 2016 (Euro)[5]	BIP pro Kopf in KKS 2016 (EU28=100)[6]
Belgien	11.365.834	30.528	423,048	37.500	118
Deutschland	82.800.000	357.340	3.144,05	38.100	123
Frankreich	67.024.459[7]	632.834[8]	2.228,857	33.300	104
Italien	60.589.445	302.073	1.680,523	27.700	97
Luxemburg	590.667	2.586	53,005	90.700	258
Niederlande	17.081.507	41.540	702,641	41.300	128
Dänemark	5.748.769	42.921	277,489	48.400	124
Irland	4.774.833	69.797	275,567	58.800	183
Vereinigtes Königreich	65.808.573	248.528[9]	2.393,134	36.500	107
Griechenland	10.757.293	131.957	174,199	16.200	68
Portugal	10.309.573	92.225	185,18	17.900	77
Spanien	46.528.966	505.970	1.118,522	24.100	92
Finnland	5.503.297	338.435	215,615	39.200	109
Österreich	8.772.865	83.879	353,297	40.400	128
Schweden	9.995.153	438.574[10]	465,186	46.900	123
Estland	1.315.635	45.227	21,098	16.000	75
Lettland	1.950.116	64.573	24,927	12.700	65
Litauen	2.847.904	65.300	38,668	13.500	75
Malta	440.433	316	9,927	22.700	96
Polen	37.972.964	312.679	425,98	11.100	68
Slowakei	5.435.343	49.035	81,154	14.900	77
Slowenien	2.065.895	20.273	40,418	19.600	83
Tschechien	10.578.820	78.867	176,564	16.700	88
Ungarn	9.797.561	93.024	113,731	11.600	67
Zypern	854.802	9.251	18,123	21.300	83
Bulgarien	7.101.859	111.002	48,129	6.800	49
Rumänien	19.638.309	238.391	169,578	8.600	58
Kroatien	4.154.213	56.594	46,382	11.100	60
Europäische Union	**511.805.088**	**4.463.719**	**14.905,008**	**29.100**	100

Anhang für Erdkunde-Benachteiligte

1.) Karte

2.) Zu den Benelux-Staaten gehören **Be**lgien, **Ne**derlande und **Lu**xemburg.