Mathematik LK 12 M1, 3. KA – Kreise/Kugeln und Matrizen – Lösung **19.03.2018**

Analytische Geometrie

Aufgabe 1: Geraden im $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind die Geraden *g* und *h* mit den Gleichungen

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

1.1 Zeige, dass die Geraden *g* und *h* windschief sind und berechne den Abstand zwischen den beiden Geraden.

Kein Schnittpunkt: $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. Daraus

$$\begin{array}{ll} I. & 1+t=6-s \quad | \ I.-II. \\ II. & 2-t=5-s \\ III. & t=7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} Ib. & -1+3t=1 \Leftrightarrow 3t=2 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3} \\ III. & t=7 \end{array} \quad \text{Widerspruch!}$$

Nicht parallel: Vergleiche Richtungsvektoren. Vielfache? $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} I. & r=-1 \\ II. & r=1 \\ III. & 1=0 \end{array}$

Also sind die Geraden windschief.

Abstandberechnung: $d=|(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{n}_0|=\left|(\vec{q}-\vec{p})\cdot\frac{\vec{v}\times\vec{w}}{|\vec{v}\times\vec{w}|}\right|$ mit $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\vec{q}=\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix},\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} \qquad |\vec{v}\times\vec{w}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

Also $d=\left|\left[\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(5\cdot1-3\cdot1-7\cdot2)\right|=\left|\frac{-12}{\sqrt{6}}\right|=\mathbf{2\sqrt{6}}\approx 4{,}90$

Hinweis: Die Abstandberechnung alleine ist zur Lösung der Aufgabe nicht ausreichend, denn aus d <>0 folgt nur, dass sich die Geraden nicht schneiden. Man muss auch noch zeigen, dass sie nicht parallel sind.

A: Die beiden Geraden sind windschief und der Abstand beträgt 4,90 L.E. .

<u>1.2</u> Berechne alle Punkte auf *g* und *h*, die vom Ursprung aus den Abstand *8 L.E.* haben.

Ein Punkt auf $g:\ \vec{x_G}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Dieser soll den Abstand *8 L.E.* vom Ursprung haben, also

$$\left|\vec{x_G}-\vec{0}\right|=8 \Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right|=8 \Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix}1+t\\2-t\\t\end{pmatrix}\right|=8 \Leftrightarrow \sqrt{(1+t)^2+(2-t)^2+t^2}=8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+2t+1+t^2-4t+4+t^2}=8 \Leftrightarrow \sqrt{3t^2-2t+5}=8 \quad |\ ^2$$
$$\Rightarrow 3t^2-2t+5=64 \quad |\ -64$$
$$\Leftrightarrow 3t^2-2t-59=0 \quad |\ :3$$
$$\Leftrightarrow t^2-\frac{2}{3}t-\frac{59}{3}=0 \quad |\ \text{p-q-Formel}$$

$$t_{1/2}=\frac{1}{3}\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{59}{3}}=\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{177}{9}}=\frac{1\pm\sqrt{178}}{3} \Rightarrow t_1\approx-4{,}1139\ ;\ t_2\approx4{,}7806$$

Setze $t_1=\frac{1-\sqrt{178}}{3}$ in *g* ein: $\vec{x_{G1}}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\frac{1-\sqrt{178}}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4-\sqrt{178}}{3}\\\frac{5+\sqrt{178}}{3}\\\frac{1-\sqrt{178}}{3}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\mathbf{-3{,}11}\\\mathbf{6{,}11}\\\mathbf{-4{,}11}\end{pmatrix}$

Setze $t_2=\frac{1+\sqrt{178}}{3}$ in *g* ein: $\vec{x_{G2}}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\frac{1+\sqrt{178}}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4+\sqrt{178}}{3}\\\frac{5-\sqrt{178}}{3}\\\frac{1+\sqrt{178}}{3}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\mathbf{5{,}78}\\\mathbf{-2{,}78}\\\mathbf{4{,}78}\end{pmatrix}$

Alternativer Ansatz:

Die Kugel $K:\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=8^2$ ist die Menge aller Punkte mit dem Abstand 8 zum Koordinatenursprung. Die Schnittpunkte von *K* mit *g* sind die gesuchten Punkte auf der Geraden. Setzt man nun $x_{1,}x_2$ und x_3 aus der Geradengleichung ein, führt dies wieder zu:
$$(1+t)^2+(2-t)^2+t^2=64$$

Gleicher Ansatz für *h* führt zu:

$$(6-t)^2+(5-t)^2+7^2=64 \;\Leftrightarrow\; t^2-12t+36+t^2-10t+25+49=64 \;\Leftrightarrow\; 2t^2-22t+110=64$$

$$\Leftrightarrow 2t^2-22t+46=0 \quad | \;:2 \;\Leftrightarrow t^2-11t+23=0$$ p-q-Formel:

$$t_{3/4}=5{,}5\pm\sqrt{(-5{,}5)^2-23}=5{,}5\pm1\sqrt{30{,}25-23}=5{,}5\pm\sqrt{7{,}25} \;\Rightarrow\; t_1\approx2{,}8074 \;;\; t_2\approx8{,}1926$$

Setze $t_1=5{,}5-\sqrt{7{,}25}$ in *h* ein: $\vec{x_{G3}}=\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}+5{,}5-\sqrt{7{,}25}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5+\sqrt{7{,}25}\\-0{,}5+\sqrt{7{,}25}\\7\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\mathbf{3{,}19}\\\mathbf{2{,}19}\\\mathbf{7}\end{pmatrix}$

Setze $t_2=5{,}5+\sqrt{28{,}25}$ in *h* ein: $\vec{x_{G4}}=\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}+5{,}5+\sqrt{7{,}25}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5-\sqrt{7{,}25}\\-0{,}5-\sqrt{7{,}25}\\7\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\mathbf{-2{,}19}\\\mathbf{-3{,}19}\\\mathbf{7}\end{pmatrix}$

<u>**1.3**</u> Bestimme den Abstand des Stützpunktes von *g* zur Geraden *h*.

Lotgerade von $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ auf $h:\; \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$:

Der Verbindungsvektor vom Ortsvektor $\vec{f}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}$ des Lotfußpunktes *F* zu $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ steht senkrecht zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ von *h*, also

$$\begin{pmatrix}f_1-1\\f_2-2\\f_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; (f_1-1)\cdot(-1)+(f_2-2)\cdot(-1)+f_3\cdot0=0 \;\Leftrightarrow\; -f_1+1-f_2+2=0 \;\Leftrightarrow\; f_1=-f_2+3\,(IV.)$$

Außerdem liegt *F* auf h:

$$\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}\cdot t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}I.\;\; f_1=6-t\\ II.\;\; f_2=5-t\\ III.\; f_3=7\end{matrix} \;\underset{I.-II.}{\Rightarrow}\; f_1-f_2=1 \;\Rightarrow\; Ia.\;\; f_1=f_2+1$$

Setze $Ia.=IV.:\; -f_2+3=f_2+1 \;\Leftrightarrow\; 2f_2=2 \;\Leftrightarrow\; f_2=1$ Damit ist $f_1=f_2+1=1+1=2$

Also $\vec{f}=\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}$ Abstand: $\boldsymbol{d}=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+7^2}=\sqrt{51}\approx\mathbf{7{,}14}$

<u>1.4</u> Man kann den Abstand windschiefer Geraden auf den Abstand paralleler Ebenen zurück führen. Beschreibe diesen Zusammenhang mit einer Skizze und berechne die Gleichungen der parallelen Ebenen E_g und E_h mit $g \subset E_G$ und $h \subset E_h$.

Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden ist die kleinste Entfernung zwischen einem Punkt auf der einen Gerade und einem Punkt auf der anderen Gerade. Der Abstand entspricht somit der Länge des gemeinsamen Lots der beiden Geraden.

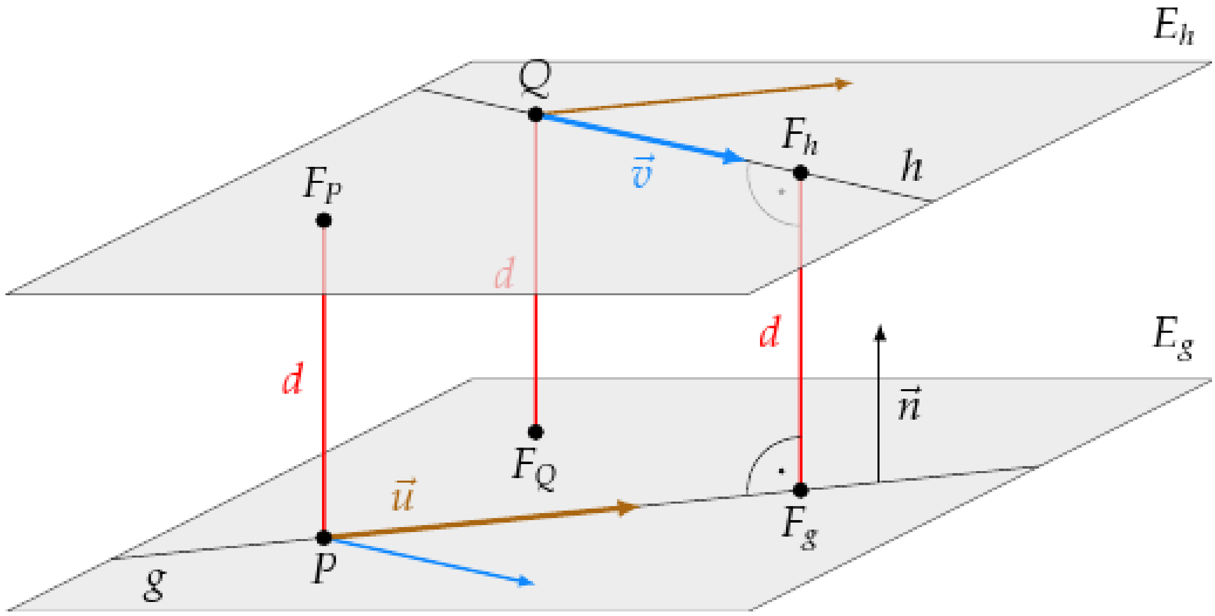
Berechnung des Abstands zweier windschiefer Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$ *und* $h: \vec{x} = \vec{q} + t\vec{w}$:

1. Finde zwei zueinander parallele Ebenen E_g und E_h, in denen g bzw. h enthalten sind.
Dazu: Wähle $\vec{p}$ *als Stützvektor von E_g und* $\vec{q}$ *als Stützvektor von E_h. Wähle* $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ *als Normalenvektor beider Ebenen.*

2. Der Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$ *beider Ebenen ist damit parallel zum gemeinsamen Lot der beiden Geraden.* $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. *Damit ist* E_h: $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$ *und* E_g: $(\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0 = 0$

3. Der gesuchte Abstand der windschiefen Geraden ist der Abstand beider Ebenen und somit auch der Abstand von P zu E_h, (da P in E_g liegt) und der Abstand von Q zu E_g, (da Q in E_h liegt).

Mit der Hesseschen Normalenform folgt: $d = |(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0| = |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0|$



1.5 Ermittle die Gleichung einer Geraden *k*, die *g* und *h* orthogonal schneidet.

F_g liegt auf $g:\ \vec{f}_g=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \ \Rightarrow\ F_g(1+t|2-t|t)$

F_h liegt auf $h:\ \vec{f}_h=\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \ \Rightarrow\ F_h(6-s|5-s|7)$

Damit ist $\vec{F_gF_h}=\begin{pmatrix}6-s-1-t\\5-s-2+t\\7-t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-s-t\\3-s+t\\7-t\end{pmatrix}$

Der Verbindungsvektor $\vec{F_gF_h}$ steht senkrecht zu den Richtungsvektoren der beiden Geraden.

$$\vec{F_gF_h}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=0 \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}5-s-t\\3-s+t\\7-t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=0 \ \Leftrightarrow\ (5-s-t)\cdot 1+(3-s-t)\cdot(-1)+(7-t)\cdot 1=0$$
$$\Leftrightarrow\ 5-s-t-3+s-t+7-t=0 \ \Leftrightarrow\ 9-3t=0 \ \Leftrightarrow\ t=3$$

$$\vec{F_gF_h}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=0 \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}5-s-t\\3-s+t\\7-t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=0 \ \Leftrightarrow\ (5-s-t)\cdot(-1)+(3-s-t)\cdot(-1)+(7-t)\cdot 0=0$$
$$\Leftrightarrow\ -5+s+t-3+s-t=0 \ \Leftrightarrow\ -8+2s=0 \ \Leftrightarrow\ 2s=8 \ \Leftrightarrow\ s=4$$

Damit ist $F_g(1+3|2-3|3)=F_g(4|-1|3)$ und $F_h(6-4|5-4|7)=F_h(2|1|7)$

$$\vec{F_gF_h}=\begin{pmatrix}5-4-3\\3-4+3\\7-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{k:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}}$$

1.6 Die Geraden *g* und *h* können auch Flugbahnen zweier Flugzeuge darstellen (Längen in Kilometern und *t* in Minuten). Berechne die Geschwindigkeit der Flugzeuge in Kilometern pro Stunde.

Flugzeug auf g: $\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{3}\approx 1{,}73$ bedeutet $v_g=1{,}73\,\frac{km}{min}=1{,}73\,\frac{km}{\frac{1}{60}h}=\mathbf{103{,}92\,\frac{km}{h}}$

Flugzeug auf h: $\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{2}$ bedeutet $v_h=1{,}41\,\frac{km}{min}=1{,}41\,\frac{km}{\frac{1}{60}h}=\mathbf{84{,}85\,\frac{km}{h}}$

<u>1.7</u> Bestimme den Zeitpunkt, bei dem sich die Flugzeuge am nächsten kommen. Berechne diesen minimalen Abstand.

Punkte der nächsten zeitlichen Annäherung:

G_t liegt auf $g\colon\ \vec{g}_t=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow G_t(1+t|2-t|t)$

H_t liegt auf $h\colon\ \vec{h}_t=\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow H_t(6-t|5-t|7)$ Die Zeit *t* ist für beide Geraden gleich.

Damit ist $\vec{G_t H_t}=\begin{pmatrix}6-t-1-t\\5-t-2+t\\7-t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-2t\\3\\7-t\end{pmatrix}$

Minimale Länge des Verbindungsvektors: $Min\left|\begin{pmatrix}5-2t\\3\\7-t\end{pmatrix}\right|=Min\left(\sqrt{(5-2t)^2+3^2+(7-t)^2}\right)$

Suche Minimum der Ersatzfunktion $f(t)=(5-2t)^2+3^2+(7-t)^2=4t^2-20t+25+9+t^2-14t+49$

$$f(t)=5t^2-34t+83=5\left(t^2-\frac{34}{5}t\right)+\frac{83}{5}=5t^2-34t+83=5\left(t^2-\frac{34}{5}t+\left(\frac{34}{10}\right)^2-\left(\frac{34}{10}\right)^2\right)+\frac{83}{5}$$
$$=5\cdot\left[(t-3{,}4)^2-\left(\frac{34}{10}\right)^2\right]+\frac{83}{5}$$

Es interessiert nur die *t*-Komponente des Scheitelpunkts, also brauchen wir nicht weiter rechnen.

Also $t_{min}=3{,}4\,min$.

$$\boldsymbol{d}=Min\left|\begin{pmatrix}5-2t\\3\\7-t\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}5-2\cdot3{,}4\\3\\7-3{,}4\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1{,}8\\3\\3{,}6\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-1{,}8)^2+3^2+3{,}6^2}=\sqrt{\frac{126}{5}}\approx\mathbf{5{,}0200}$$

A: Nach 3,4 Minuten kommen sich die Flugzeuge mit 5 km Abstand am nächsten.

__1.8__ Senkrecht von oben scheint die Sonne auf die Flugzeuge. Deren Bahn beschreibt auf dem ebenen Boden (x_1-x_2-Ebene) je eine „Schattenlinie". Berechne den Punkt, in dem sich diese beiden Linien schneiden.

Für die Schattenlinie fällt die x_3-Komponente der Geradengleichungen weg.

$s_g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ und $s_h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$. Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} I.\quad 1+s=6-t \\ II.\ 2-s=5-t \end{array} \underset{I.-II.}{\Rightarrow} -1+2s=1 \Leftrightarrow 2s=2 \Leftarrow s=1$$

$\vec{x}_s=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ **A: Die Linien treffen sich im Punkt (2|1|0).**

__Aufgabe 2:__ Kreise

__2.1__ Untersuche, ob durch die Gleichung $x_1^2+x_2^2+6x_1-1-4x_2-2=0$ ein Kreis beschrieben wird und bestimme ggf. den Mittelpunkt und den Radius.

$$x_1^2+x_2^2+6x_1-1-4x_2-2=0 \Leftrightarrow x_1^2+6x_1+x_2^2-4x_2=3 \Leftrightarrow x_1^2+6x_1+3^2+x_2^2-4x_2+2^2=3+3^2+2^2$$

$\Leftrightarrow (x_1+3)^2+(x_2-2)^2=16$ Also Kreis mit **Mittelpunkt (-3|2)** und **Radius $r=4$.**

__2.2__ Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Kreise $k_1:\ x_1^2+x_2^2+2x_1=19$ und $k_2:\ x_1^2-6x_1+x_2^2-8x_2=-21$ zueinander.

$$x_1^2+x_2^2+2x_1=19 \Leftrightarrow x_1^2+2x_1+1^2+x_2^2=19+1^2 \Leftrightarrow (x_1+1)^2+(x_2+0)^2=20$$

k_1 hat den Mittelpunkt (-1|0) und den Radius $r_1=\sqrt{20}\approx 4{,}47$.

$$x_1^2-6x_1+x_2^2-8x_2=-21 \Leftrightarrow x_1^2-6x_1+3^2+x_2^2-8x_2+4^2=-21+3^2+4^2 \Leftrightarrow (x_1-3)^2+(x_2-4)^2=4$$

k_2 hat den Mittelpunkt (3|4) und den Radius $r_2=2$.

Abstand der Mittelpunkte: $d=\sqrt{(3+1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}\approx 5{,}66$

Weil $d<r_2+2r_1$ müssen sich die Kreise schneiden.

A: Die Kreise schneiden sich.

__2.3__ Berechne die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt M auf der Geraden $g: x_1-x_2=0$ liegt, und der durch die Punkte $P(-7|3)$ und $Q(5|-1)$ geht.

Kreisgleichung: $(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2=r^2$

$M(m_1|m_2)$ liegt auf *g*, also $m_1-m_2=0 \Leftrightarrow m_1=m_2$ und damit $(x_1-m_1)^2+(x_2-m_1)^2=r^2$

Sowohl *P* als auch *Q* liegen auf dem Kreis und erfüllen somit die Kreisgleichung.

$(-7-m_1)^2+(3-m_1)^2=r^2$ und $(5-m_1)^2+(-1-m_1)^2=r^2$ Gleichsetzen:

$(-7-m_1)^2+(3-m_1)^2=(5-m_1)^2+(-1-m_1)^2$

$\Leftrightarrow\ m_1^2+14m_1+49+m_1^2-6m_1+9=m_1^2-10m_1+25+m_1^2+2m_1+1 \quad | \ T;-2m_{12}$

$\Leftrightarrow\ 8m_1+58=-8m_1+26 \quad | \ T;+8m_1-58$

$\Leftrightarrow\ 16m_1=-32 \quad | \ :16$

$\Leftrightarrow\ m_1=-2$ Damit ist auch $m_2=-2$. Setze m_1 und m_2 und *P* in die Kreisgleichung ein:

$(-7-(-2))^2+(3-(-2))^2=r^2 \ \Leftrightarrow\ (-5)^2+(5^2)=r^2 \ \Leftrightarrow\ 25+25=r^2 \ \Leftrightarrow\ 50=r^2$

Also $\mathbf{(x_1+2)^2+(x_2+2)^2=50}$

2.4 Zeige allgemein, dass die Gerade $g:\ \vec{x}\cdot\vec{n}=p$ genau dann Tangente an den Kreis $k:\ \vec{x}^2=r^2$ ist, wenn gilt: $r^2\cdot\vec{n}^2=p^2$.

Koordinatenschreibweisen:

$g:\ x_1n_1+x_2n_2=p \ \Leftrightarrow\ x_2=\frac{p}{n_2}-\frac{n_1}{n_2}x_1 \ ; \ k:\ x_1^2+x_2^2=r^2 \ \Leftrightarrow\ x_2^2=r^2-x_1^2$

Gleichsetzen: $r^2-x_1^2=\left(\frac{p}{n_2}-\frac{n_1}{n_2}x_1\right)^2 \quad | \ T$

$\Leftrightarrow\ r^2-x_1^2=\left(\frac{p}{n_2}\right)^2-2\cdot\frac{p}{n_2}\cdot\frac{n_1}{n_2}x_1+\left(\frac{n_1}{n_2}x_1\right)^2 \quad | \ T$

$\Leftrightarrow\ r^2-x_1^2=\frac{p^2}{n_2^2}-\frac{2pn_1}{n_2^2}x_1+\frac{n_1^2}{n_2^2}x_1^2 \quad | \ \cdot n_2^2$

$\Leftrightarrow\ n_2^2r^2-n_2^2x_1^2=p^2-2pn_1x_1+n_1^2x_1^2 \quad | \ -p^2+2pn_1x_1-n_1^2x_1^2$

$\Leftrightarrow\ -n_2^2x_1^2-n_1^2x_1^2+2pn_1x_1+n_2^2r^2-p^2=0 \quad | \ T$

$\Leftrightarrow\ -(n_1^2+n_2^2)x_1^2+2pn_1x_1+n_2^2r^2-p^2=0 \quad | \ :\left(-n_1^2+n_2^2\right)$

$\Leftrightarrow\ x_1^2-\frac{2pn_1}{n_1^2+n_2^2}x_1-\frac{n_2^2r^2+p^2}{n_1^2+n_2^2}=0$ p-q-Formel anwenden. Tangente: Nur eine Lösung, also

$\Leftrightarrow\ x_1=\frac{2pn_1}{2n_1^2+2n_2^2}\pm\sqrt{\left(-\frac{2pn_1}{2n_1^2+2n_2^2}\right)^2+\frac{n_2^2r^2-p^2}{n_1^2+n_2^2}}$

Diskriminante muss *0* sein!

$\left(-\frac{2pn_1}{2n_1^2+2n_2^2}\right)^2+\frac{n_2^2r^2-p^2}{n_1^2+n_2^2}=0 \quad | \ T$

$\Leftrightarrow\ \frac{(-2)^2(pn_1)^2}{4\left(n_1^2+n_2^2\right)^2}+\frac{4\left(n_1^2+n_2^2\right)\left(n_2^2r^2-p^2\right)}{4\left(n_1^2+n_2^2\right)^2}=0 \quad | \ \cdot\left(n_1^2+n_2^2\right)^2$

$\Leftrightarrow\ p^2 n_1^2 + (n_1^2+n_2^2)(n_2^2 r^2 - p^2) = 0 \quad |\ T$
$\Leftrightarrow\ p^2 n_1^2 + n_1^2 n_2^2 r^2 - n_1^2 p^2 + n_2^4 r^2 - n_2^2 p = 0 \quad |\ T$
$\Leftrightarrow\ n_1^2 n_2^2 r^2 + n_2^4 r^2 - n_2^2 p = 0 \quad |\ :n_2^2$
$\Leftrightarrow\ n_1^2 r^2 + n_2^2 r^2 - p^2 = 0 \quad |\ +p^2$
$\Leftrightarrow\ n_1^2 r^2 + n_2^2 r^2 = p^2 \quad |\ T$
$\Leftrightarrow\ r^2(n_1^2+n_2^2) = p^2 \quad |\ T$
$\Leftrightarrow\ r^2 \cdot \vec{n}^2 = p^2$ q.e.d.

Weil es sich ausschließlich um Äquivalenzumwandlungen handelt (die p-q-Formel hat hier nur eine Lösung), gilt der Beweis in beide Richtungen.

<u>Aufgabe 3:</u> Kugeln

<u>3.1</u> Untersuche die Lage des Punktes $P(8|1|2)$ zur Kugel *k* mit dem Mittelpunkt $M(-2|-2|3)$ und dem Radius $r=8$.

Kugelgleichung: $(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2+(x_3-m_3)^2=r^2$ Hier: $(x_1+2)^2+(x_2+2)^2+(x_3-3)^2=8^2$

Abstand *P* zu *M*: $|\vec{MP}| = \left|\begin{pmatrix} 8+2 \\ 1+2 \\ 2-3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{10^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{110}$

Alle Punkte auf der Kugel haben den Abstand $\sqrt{64}$ zum Mittelpunkt. *P* hat einen größeren Abstand und liegt somit **außerhalb** der Kugel.

<u>3.2</u> Berechne den Radius *r* der Kugel *k* mit dem Mittelpunkt $M(5|-4|5)$, welche die Ebene $E:\ 9x_1-8x_2-12x_3=17$ berührt.

Berechne den Abstand von *M* zur Ebene *E*:

$$d = \left|\frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 - b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right| = \left|\frac{9\cdot 5+(-8)\cdot(-4)+(-12)\cdot 5-17}{\sqrt{9^2+(-8)^2+(-12)^2}}\right| = \left|\frac{0}{17}\right| = 0$$

A: *M* liegt auf der Ebene. Es gibt also keine Kugel, welche die Bedingung erfüllt.
(r = 0 ist auch eine akzeptable Antwort).

<u>3.3</u> Bestimme den Pol der Polarebene $E:\ 3x_1+x_2+2x_3=4$ bzgl. der Kugel $K:\ \vec{x}^2=12$

Aus $K:\ \vec{x}^2=12 \Leftrightarrow (\vec{x}-\vec{0})^2=12$ folgt $M(0|0|0)$.

$3x_1+x_2+2x_3=4 \quad |\ \cdot 3$
$\Leftrightarrow\ 9x_1+3x_2+6x_3=12$ *E* ist Polarebene, also gilt für E auch die Gleichung

Polarebene: $(\vec{x}-\vec{m})\cdot(\vec{p}-\vec{m})=r^2$ Hier: $\vec{x}\cdot\vec{p}=r^2 \Leftrightarrow x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 12$

Der Vergleich der Faktoren ergibt $\boldsymbol{P(9|3|6)}$.

Mathematik LK 12 M1, 3. KA – Kreise/Kugeln und Matrizen – Lösung 19.03.2018

Lineare Algebra II: Rechnen mit Matrizen

Aufgabe 4: Definitionen

Schreibe jeweils eine kurze (aber gültige) Definition für die folgenden Begriffe auf:

- Homogenes/Inhomogenes LGS
  Ein LGS der Form $A(\vec{x})=\vec{b}$ heißt homogen, wenn $\vec{b}$ ein Nullvektor ist. Andernfalls heißt es inhomogen.

- Matrix
  Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von mathematischen Elementen (Zahlen, Variablen, Funktionen, Vektoren, etc.) in tabellarischer Form.

- Determinante
  Eine Determinante ist eine Zuordnung, die einer quadratischen Matrix eine Zahl (Skalar) zuordnet. Dabei gilt: Wenn $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, dann ist $det\,A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

  Wenn $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, dann ist

  $det\,A=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$

- Transponierte Matrix
  Die Matrix $A^T\in K^{nxm}$ heißt transponierte Matrix zu einer Matrix $A\in K^{mxn}$, wenn gilt:
  $a^T_{j,i}=a_{i,j} \quad \forall i, j$

- Inverse Matrix
  Eine quadratische Matrix $A\in K^{nxn}$ heißt invertierbar, wenn es eine Matrix $A^{-1}\in K^{nxn}$ gibt, so dass gilt: $A\cdot A^{-1}=E$, wobei $E\in K^{nxn}$ die Einheitsmatrix ist. A^{-1} heißt inverse Matrix zu A oder einfach Inverse zu A.

- Orthogonalmatrix
  Die quadratische Matrix $A\in K^{nxn}$ heißt orthogonal, wenn gilt: $A\cdot A^T=E$
  ($A^T\cdot A=E$ gilt dann auch automatisch).

Aufgabe 5: Rechnen mit Matrizen

Gegeben sind die Matrizen, Vektoren und Skalare

$$r=-\frac{1}{4}, \vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mathematik LK 12 M1, 3. KA – Kreise/Kugeln und Matrizen – Lösung **19.03.2018**

Berechne die folgenden Ausdrücke und Terme

<u>**5.1**</u> $r\cdot\vec{a}=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-0{,}5}\\\mathbf{0{,}25}\end{pmatrix}$

<u>**5.2**</u> $A\cdot\vec{a}$ geht nicht, denn die Anzahl der Spalten von *A* muss gleich der Anzahl der Zeilen von $\vec{a}$ sein.

<u>**5.3**</u> $A\cdot C=\begin{pmatrix}4&-4&-4\\1&-2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&-4\\1&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-4}&\mathbf{0}&\mathbf{-20}\\\mathbf{-1}&\mathbf{2}&\mathbf{-4}\end{pmatrix}$

<u>**5.4**</u> $C\cdot D=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\1&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\3&2&2\\-4&1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{11}&\mathbf{-7}&\mathbf{13}\\\mathbf{-5}&\mathbf{-3}&\mathbf{-3}\\\mathbf{-3}&\mathbf{2}&\mathbf{-3}\end{pmatrix}$

<u>**5.5**</u> $E^T=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$

<u>**5.6**</u> E^{-1} $\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\underset{I\leftrightarrow III}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$ Also $E^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$

<u>**5.7**</u> $rang(C)$ $\begin{pmatrix}1&-2&-4\\1&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\underset{\substack{II-I\\III-I}}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&-2&-4\\0&0&4\\0&2&5\end{pmatrix}\underset{II\leftrightarrow III}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&-2&-4\\0&2&5\\0&0&4\end{pmatrix}$

Also $\boldsymbol{rang(C)=3}$

<u>**5.8**</u> $\det E$ $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\underset{I\leftrightarrow III}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\det E=(-1)\cdot1\cdot1\cdot1=\mathbf{-1}$

(Faktor -1 wegen Zeilentausch)

<u>**5.9**</u> $\det F$ $\begin{pmatrix}1&0&0&4\\-2&2&2&2\\3&0&3&1\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}\underset{\substack{II+2I\\III-3I\\IV+I}}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&2&2&10\\0&0&3&-7\\0&-1&-1&4\end{pmatrix}\underset{IV+0{,}5\,II}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&2&2&10\\0&0&3&-7\\0&0&0&9\end{pmatrix}$

$\det F=1\cdot2\cdot3\cdot9=\mathbf{54}$

__5.10__ Betrachte das LGS $F\cdot\vec{x}=\vec{b}$. Bestimme $\vec{x}$ und überprüfe, dass $F\cdot\vec{x}=\vec{b}$ gilt, indem du das Matrix-Vektor-Produkt aus *F* und $\vec{x}$ bildest.

Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{II+2I \\ III-3I \\ IV+I}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -11 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{II:2 \\ III:3}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 3{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -11/3 & -10/3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{IV+II \\ II-III}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 26/3 & 41/6 \\ 0 & 0 & 1 & -11/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 4{,}5 \end{pmatrix} \underset{IV:9}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 26/3 & 41/6 \\ 0 & 0 & 1 & -11/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{I-4IV \\ II-26/3\,IV \\ II+11/3\,IV}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$ Also ist $\boldsymbol{\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ -1{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}}$

Test $F\cdot\vec{x}=\vec{b}$

				1
				2,5
				-1,5
				0,5
1	0	0	4	**3**
-2	2	2	2	**1**
3	0	3	1	**-1**
-1	-1	-1	0	**-2**

__5.11__ Wir betrachten die Matrix $D'=\begin{pmatrix} d & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Es gilt $det(D')=0$. Bestimme *d*.

Regel von Sarrus:

$$det(D')=d\cdot2\cdot(-4)+1\cdot2\cdot(-4)+1\cdot3\cdot1-1\cdot2\cdot(-4)-1\cdot3\cdot(-4)-d\cdot2\cdot1=-8d-8+3+8+12-2d=6d+15$$

Es muss gelten: $det(D')=0 \;\Leftrightarrow\; -10d+15=0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{d=1{,}5}$