

Aufgabe 1: Rechnen mit Vektoren

Berechne... und vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich. Falls der Term keinen gültigen Ausdruck darstellt, schreibe „ungültig“.

$$1.1 \quad \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = |3 \cdot (-5) + 4 \cdot 12 + 1 \cdot 0| \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} = |-15 + 48| \cdot \sqrt{2} = 33\sqrt{2}$$

$$1.2 \quad \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} -12 \\ -5 \\ 56 \end{pmatrix} \right| \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{144 + 25 + 3136} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{3305} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3305} \\ -\sqrt{3305} \end{pmatrix}$$

$$1.3 \quad \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \text{ungültig} \quad (\text{Kreuzprodukt nur für Vektoren im } \mathbb{R}^3 \text{ definiert}).$$

1.4 ...den Winkel zwischen $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\cos(\phi) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{3 \cdot (-5) + 4 \cdot 12 + 1 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + 12^2 + 0^2}} = \frac{33}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{169}} = \frac{33}{13\sqrt{26}} = 0,4978$$

$$\Rightarrow \phi = \arccos(0,4978) = 1,0497 = \mathbf{60,1432^\circ}$$

1.5 ...den Gegenvektor zum Einheitsvektor von $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$-\vec{v}_0 = -\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = -\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}} = -\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{26}} = -\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{26}} \\ \frac{4}{\sqrt{26}} \\ \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$$

1.6 ...den Flächeninhalt des von $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

$$A = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -12 \\ -5 \\ 56 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3305} \text{ F.E.} \approx 57,49 \text{ F.E.}$$

1.7 ...das Volumen des von $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Spats.

$$V = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -12 \\ -5 \\ 56 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = -12 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 56 \cdot 1 = -12 - 5 + 56 = 39 \text{ V.E.}$$

Aufgabe 2: Lineare Abhängigkeit / - Unabhängigkeit

2.1 Entscheide mit Hilfe einer Rechnung, ob der Satz von Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig ist.

2.1.1 $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \\ 8 \\ 2 \\ 8 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 10 \\ 40 \\ 10 \\ 40 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}$

Der Begriff der linearen Abhängigkeit ergibt nur innerhalb eines Vektorraumes einen Sinn.

(Vektoren haben unterschiedliche Dimensionen).

2.1.5 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Ist linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ nur die triviale Lösung } a=b=c=0 \text{ hat.}$$

I. $a - 2b + 4c = 0 \quad | \cdot 2$

II. $2a + b + 3c = 0$

III. $a + 3b - c = 0 \quad | \cdot 2$

Ia. $-5b + 5c = 0 \quad | \text{ Ia.} - \text{IIa.}$

IIa. $-5b + 5c = 0$

$0 = 0$

I. $2a - 4b + 8c = 0 \quad | \text{ I.} - \text{II.}$

II. $2a + b + 3c = 0 \quad | \text{ II.} - \text{III.}$

III. $2a + 6b - 2c = 0$

linear abhängig

2.2 Erkläre, warum ein Satz von $(n+1)$ Vektoren aus dem \mathbb{R}^n immer linear abhängig ist.

Ein Satz von $(n+1)$ Vektoren aus dem \mathbb{R}^n führt zu einem LGS mit n Gleichungen und $(n+1)$ Unbekannten. Ein solches LGS hat unendlich viele Lösungen. Die Bedingung für lineare Unabhängigkeit ist, dass es nur eine einzige Lösung gibt (alle Unbekannten gleich 0). Also ist der Satz von $(n+1)$ Vektoren linear abhängig.

Aufgabe 3: Gegeben sind die folgenden Geraden und Ebenen:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_2: 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$$

3.1 Wandle die Ebene E_1 in alle bekannten Ebenenformen um.

Von der Parameterform in die Koordinatenform $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

I. $x_1 = 2 + 6r - s \quad | \quad 2I + III$

II. $x_2 = 3 + 4r$

III. $x_3 = -4r + 2s$

Ia. $2x_1 + x_3 = 4 + 8r \quad | \quad Ia - 2II$

II. $x_2 = 3 + 4r$

$E_1: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$

Normalenform: Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Stützvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ von Parameterform übernommen

$$E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Hesse'sche Normalenform: Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{9}} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$$E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 0$$

3.4 Untersuche, ob die Geraden g_1 und g_2 parallel oder windschief oder identisch sind oder sich schneiden. Berechne ggf. den Schnittpunkt.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad | \quad - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$I. \quad 2s - 4t = 4 \quad | \quad I - 2III$$

$$II. \quad 3s = 8 \Leftrightarrow s = \frac{8}{3}$$

$$III. \quad 4s - 2t = 12$$

$$Ia. \quad -6s = -20 \Leftrightarrow s = \frac{10}{3}$$

Das LGS hat keine Lösung, also schneiden sich die Geraden nicht.

Prüfe Richtungsvektoren auf Parallelität.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} t = 0,5 \\ t = ? \\ t = 2 \end{matrix} \Rightarrow \text{nicht parallel}$$

Die Geraden sind windschief.

3.5 Untersuche, ob sich die Geraden g_1 und die Ebene E_1 schneiden. Berechne ggf. den Schnittpunkt.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad | \quad - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I. \quad 2t - 6r + s = 1 \quad | \quad 2I + III$$

$$II. \quad 3t - 4r = 1$$

$$III. \quad 4t + 4r - 2s = 1$$

$$Ia. \quad 8t - 8r = 3 \quad | \quad Ia - 2II$$

$$II. \quad 3t - 4r = 1$$

Setze $t = 0,5$ in II ein:

$$3 \cdot \frac{1}{2} - 4r = 1 \Leftrightarrow -4r = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow r = \frac{1}{8}$$

Setze $t = 0,5$ und $r = 0,125$ in I ein:

$$2 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{1}{8} + s = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{8} + s = 1 \Leftrightarrow s = \frac{3}{4}$$

$$2t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

Eigentlich genügt es, t auszurechnen. Setze $t = \frac{1}{2}$ in die Geradengleichung ein:

$$\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.6 Untersuche, ob sich die Ebene E_1 und die Ebene E_2 schneiden. Berechne ggf. die Schnittgerade und den Schnittwinkel.

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 + 6r - s \\ x_2 = 3 + 4r \\ x_3 = -4r + 2s \end{matrix}, \quad E_2: 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$$

Setze Koordianten aus E_1 in E_2 ein:

$$2 \cdot (2+6r-s) - 2 \cdot (3+4r) + 3 \cdot (-4r+2s) = 5 \Leftrightarrow 4+12r-2s-6-8r-12r+6s=5$$

$$\Leftrightarrow -2-8r+4s=5 \Leftrightarrow -8r+4s=7 \Leftrightarrow 4s=7+8r \Leftrightarrow s=\frac{7}{4}+2r$$

Setze $s=\frac{7}{4}+2r$ in E_1 ein:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \left(\frac{7}{4}+2r\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/4 \\ 0 \\ 7/2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-7/4 \\ 3-0 \\ 0+7/2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6-2 \\ 4-0 \\ -4+4 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3 \\ 7/2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebenen.

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (siehe 3.1); } \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ (aus Koordiantengleichung).}$$

$$\cos(\phi) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{11}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{17}} \approx 0,8893 \Rightarrow \phi = 27,21^\circ$$

3.7 Berechne den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene E_1 . Führe die Rechnung zweimal durch und benutze beide bekannte Verfahren.

Lotfußpunktverfahren: Die Lotgerade geht durch $(0|0|0)$ und steht senkrecht auf der Ebene. Wähle also den Normalenvektor von E_1 als Richtungsvektor der Lotgeraden.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (siehe 3.1). Damit } g_L: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt von Lotgerade und Ebene.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. $2t - 6r + s = 2 \quad | \quad 2I + III$

II. $-2t - 4r = 3$

III. $t + 4r - 2s = 0$

$$9t = -2 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{9}$$

Ia. $5t - 8r = 2 \quad | \quad Ia - 2II$

II. $-2t - 4r = 3$

Setze $t = -\frac{2}{9}$ in Geradengleichung ein:

$$\vec{x}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/9 \\ 4/9 \\ -2/9 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Abstand ist der Abstand vom Koordinatenursprung zu \vec{x}_L .

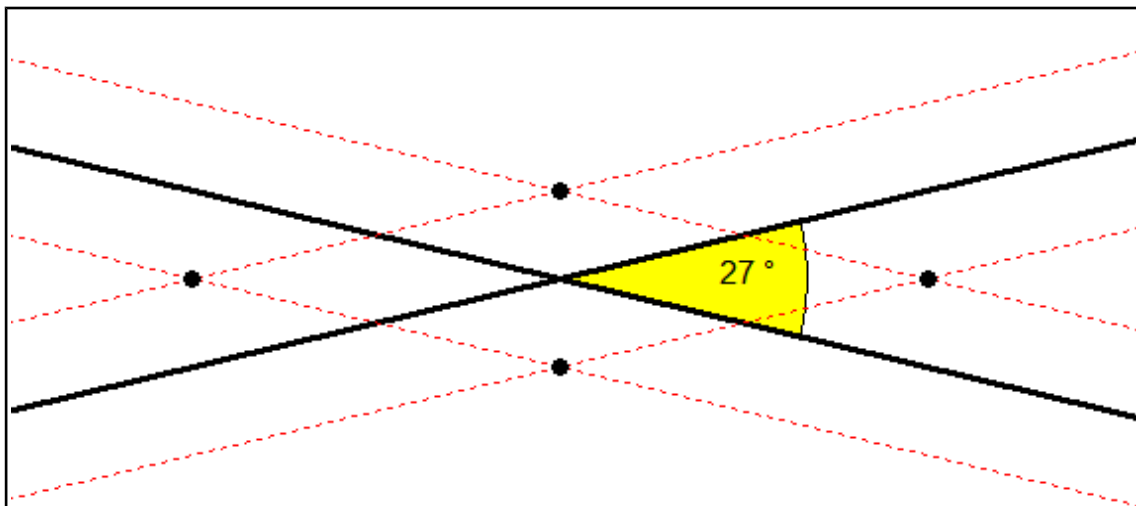
$$d = |\vec{x}_L - \vec{0}| = |\vec{x}_L| = \sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{2}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Mit der Hesse'schen Normalenform:

$$d = \left| \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right| = \left| -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 0 \right| = \left| -\frac{4}{3} + \frac{6}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

3.8 Bestimme einen Punkt im \mathbb{R}^3 , der zu beiden Ebenen den Abstand $d=1$ hat.

Betrachte die beiden Ebenen in Sichtrichtung der Schnittgeraden:



Die schwarzen Linien stellen die beiden Ebenen dar. Der Schnittpunkt der schwarzen Linien ist die Draufsicht auf die jeweilige Schnittgerade.

Die roten Linien sind Ebenen mit dem Abstand 1 parallel zu den jeweiligen Ebenen. Die runden Punkte sind Draufsichten auf die Schnittgeraden zwischen den rot markierten Ebenen. Jeder Punkt auf einer dieser Geraden ist eine Lösung der Aufgabe. Es ist also egal, welche beiden Ebenen geschnitten werden.

Eine Ebene mit dem Abstand $d=1$ zur Ebene E_1 konstruiert man z.B. durch die Verschiebung des Punktes des Stützvektors um die Längeneinheit 1 in Richtung des Normalenvektors.

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Normaleneinheitsvektor: } \vec{n}_{10} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Verschiebung: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 7/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

(Der Parameter hat den Betrag 1, weil wir den Einheitsvektor benutzen)

Also $E_{11}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 7/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E_2: 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$ Normaleneinheitsvektor: $\vec{n}_{20} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Punkt $\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf E_2 als Stützvektor: $2x_1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 \Leftrightarrow 2x_1 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2$

Also $E_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ Verschiebe Punkt: $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{17} \\ -2/\sqrt{17} \\ 3/\sqrt{17} \end{pmatrix}$

Damit $E_{22}: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4/\sqrt{17} \\ -2/\sqrt{17} \\ 3/\sqrt{17} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ Jetzt noch Schnittgerade bestimmen:

$E_{11}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 7/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 8/3 + 6r - s \\ x_2 = 7/3 + 4r \\ x_3 = 1/3 - 4r + 2s \end{matrix}$ Setze Koordianten aus E_{11} in E_{22} ein:

$$\left[\begin{pmatrix} 8/3 + 6r - s \\ 7/3 + 4r \\ 1/3 - 4r + 2s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/\sqrt{17} \\ -2/\sqrt{17} \\ 3/\sqrt{17} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{8}{3} + 6r - s - \frac{4}{\sqrt{17}} \right) \cdot 2 + \left(\frac{7}{3} + 4r + \frac{2}{\sqrt{17}} \right) \cdot (-2) + \left(\frac{1}{3} - 4r + 2s - \frac{3}{\sqrt{17}} \right) \cdot 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{16}{3} + 12r - 2s - \frac{8}{\sqrt{17}} \right) + \left(-\frac{14}{3} - 8r - 4 \right) + \left(1 - 12r + 6s - \frac{9}{\sqrt{17}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8r + 4s = -\frac{16}{3} + \frac{14}{3} + \frac{8}{\sqrt{17}} + 4 - 1 + \frac{9}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow 4s = 1,0319 + 8r \Leftrightarrow s \approx 0,2580 + 2r$$

Setze $s \approx 0,2580 + 2r$ in E_{11} ein:

$$g_{1122}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 7/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + (0,2580 + 2r) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 7/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,2580 \\ 0 \\ 0,5159 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_{1122}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,4087 \\ 7/3 \\ 0,8493 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Jeder Punkt auf dieser Geraden ist eine Lösung der Aufgabe.}$$

Wähle z.B. den Stützvektor: **Der Punkt (2,4087|2,3333|0,8493) hat sowohl zur Ebene E_1 als auch zur Ebene E_2 den Abstand $d=1$.**

Aufgabe 4: Der Eingang des berühmten Pariser Kunst-Museums "Louvre" wird durch eine 22 m hohe, regelmäßige Glas-Pyramide mit quadratischer Grundfläche gebildet. Diese Pyramide wird in einem dreidimensionalen rechtwinkligen Koordinatensystem (1 L.E. = 1 m) mit der Bodenfläche als x_1 - x_2 -Ebene betrachtet. In diesem Koordinatensystem haben die vier Eckpunkte auf dem Boden die folgenden Koordinaten:

$$A(0|0|0); B(35|0|0); C(35|35|0); D(0|35|0)$$



4.1 Zeige, dass die Spitze S die Koordinaten (17,5|17,5|22) hat.

Bei einer regelmäßigen Pyramide liegt die Spitze über dem Schnittpunkt des Diagonalen. Dieser Schnittpunkt teilt die Diagonalen in der Mitte.

$$\text{Ortsvektor Schnittpunkt Diagonale: } \vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{c} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 35 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Grundfläche des Pyramide liegt in der x_1 - x_2 -Ebene und die Spitze liegt senkrecht über dem Diagonalschnittpunkt. Die Spitze muss also die gleichen x_1 - und x_2 -Koordinaten wie der Schnittpunkt haben und die Länge des Verbindungsvektors muss die Länge 22 haben.

$$|\vec{s} - \vec{m}| = 22 \Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 22 \Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \right| = 22 \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + 0^2 + x_3^2} = 22 \Leftrightarrow x_3 = 22$$

$$\text{Also } \vec{s} = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} \text{ q.e.d.}$$

4.2 Bestimme den Winkel, den die Seitenflächen der Pyramide jeweils mit dem Fußboden bilden.
(Kontrolllösung: $\alpha \approx 51,5^\circ$)

Weil die Pyramide regelmäßig ist, ist der Winkel für alle Seitenflächen gleich. O.B.d.A. betrachten wir die Seitenfläche S_1 in der Ebene E_{S_1} , welche durch die Punkte A, B, S definiert ist.

$$E_{S_1}: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{s} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{s} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 17,5 - 0 \\ 17,5 - 0 \\ 22 - 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 17,5 - 35 \\ 17,5 - 0 \\ 22 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor von E_{S_1} : $\vec{n}_{S_1} = (\vec{s} - \vec{a}) \times (\vec{s} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -770 \\ 612,5 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Grundflächenebene: $\vec{n}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen den Normalenvektoren ist gleich dem gesuchten Winkel zwischen den Flächen:

$$\cos(\phi) = \frac{\vec{n}_{S_1} \cdot \vec{n}_G}{|\vec{n}_{S_1}| \cdot |\vec{n}_G|} = \frac{612,5}{\sqrt{1 \cdot \frac{3872225}{4}}} \approx 0,6225 \Rightarrow \phi = 51,4993^\circ$$

4.3 Am Tage fällt bei schönem Wetter (paralleles) Sonnenlicht auf die Pyramide. Zum einem bestimmten Zeitpunkt t_1 ist \vec{r} der Richtungsvektor des Sonnenlichts. Berechne die Koordinaten des Schattenpunktes P der Pyramidenspitze auf dem Boden. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

Geradengleichung für Sonnenstrahl, welcher die Spitze berührt: $g_S: \vec{x} = \vec{s} + t \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

Der Schattenpunkt P ist der Schnittpunkt von Gerade und Bodenflächenebene, also der x_1 - x_2 -Ebene.

$$\begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

I. $15t - r = -17,5$

II. $10t - s = -17,5$

III. $8t = -22 \Leftrightarrow t = -\frac{11}{4}$

Setze $t = -\frac{11}{4}$ in die Geradengleichung ein:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} - \frac{11}{4} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23,75 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Schattenpunkt hat die Koordinaten $(-23,75 | -10 | 0)$.

4.4 Die kleine Pyramide vor der Hauptpyramide ist 8 m hoch eine exakte, verkleinerte Version der großen Pyramide. Die Grundseiten der kleinen Pyramide sind jeweils parallel zu den Grundseiten der großen Pyramide. Zum Zeitpunkt t_1 berührt ein Lichtstrahl gleichzeitig die Spitzen beider Pyramiden. Berechne die Koordinaten eines Eckpunkts am Boden der kleinen Pyramide. (Das Ergebnis entsprechen nicht den realen Gegebenheiten).

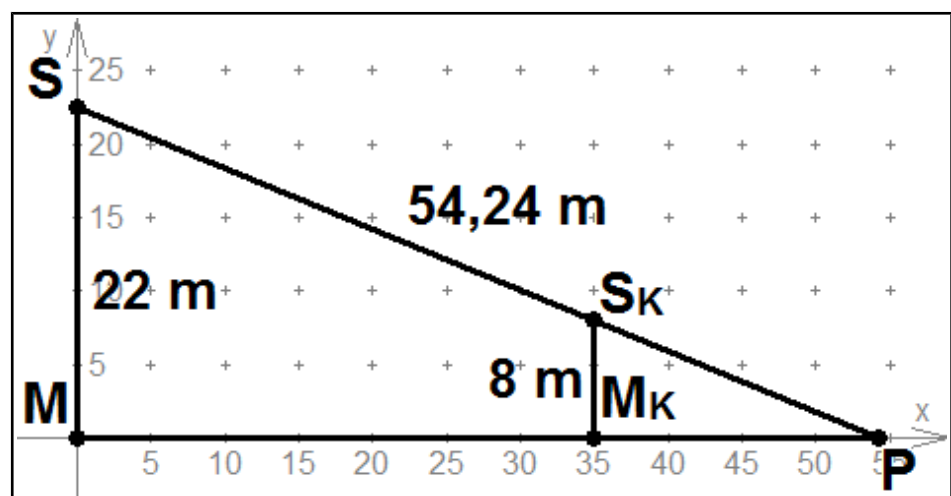
Die Senkrechten über den Grundflächendiagonalschnittpunkten der beiden Pyramiden sowie die Verbindungslinien von der Spitze und dem Grundflächendiagonalschnittpunkt der großen Pyramide jeweils zum Schattenpunkt ergeben eine Strahlensatzfigur.

Länge Verbindungsvektor von S zu P. $l = |\vec{p} - \vec{s}| = \left| \begin{pmatrix} -23,75 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} \right| = 54,2385$

Es gilt: $\frac{|\vec{SM}|}{|\vec{SP}|} = \frac{|S_K \vec{M}_K|}{|S_K \vec{P}|}$
 (Das ist der Sinus des Winkels an P).

$$\Leftrightarrow \frac{22}{54,2385} = \frac{8}{|S_K \vec{P}|}$$

$$\Leftrightarrow |S_K \vec{P}| = \frac{8 \cdot 54,2385}{22} = 19,7231$$



S_K liegt auf der Geraden

$$g_s: \vec{x} = \vec{p} + \frac{t}{54,2385} \cdot (\vec{s} - \vec{p}) \quad (\text{Normierung des Richtungsvektors}).$$

$$\vec{s}_K = \vec{p} + \frac{19,7231}{54,2385} \cdot (\vec{s} - \vec{p}) = \begin{pmatrix} -23,75 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{8}{22} \cdot \left[\begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -23,75 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -8,75 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Der Verbindungsvektor von S zu A ist $\vec{s} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix}$. Weil die kleine Pyramiden eine exakte,

verkleinerte Version der großen Pyramide ist, muss gelten: $\vec{s}_K - \vec{a}_K = \frac{8}{22} \cdot \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -8,75 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \vec{a}_K = \frac{8}{22} \cdot \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{a}_K = -\frac{8}{22} \cdot \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8,75 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15,11 \\ -6,36 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $(-15,11|6,36|0)$ ist ein Eckpunkt der kleinen Pyramide.