Mathematik LK 12 M2, 1. Kursarbeit – Integration – Lösung 25.09.2017

Aufgabe 1: Integral-, Flächen- und Volumenberechnungen

1.1 Erkläre den Zusammenhang und die Unterschiede von Integralrechnung und Flächenberechnung. Beschreibe, welche Auswirkungen das auf die Flächenberechnung hat.

Die Fläche unter dem Graphen wird in Säulen unterteilt. Bei Integralberechnung kann die Höhe der Säulen auch negativ sein, bei der Flächenberechnung nicht. Als Konsequenz muss für die Flächenberechnung das Integral an den Nullstellen in Teilintegrale unterteilt werden und die Beträge Teilintegrale addiert werden.

1.2. Berechne

1.2.1 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{4} x^3 \, dx = \left[\frac{1}{16} x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{16} 1^4 - \frac{1}{16}(-1)^4 = \mathbf{0}$

1.2.2 $\int_{0}^{\pi} \cos(x) \, dx = [\sin(x)]_0^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(0) = \mathbf{0}$

1.2.3 $\int_{-4}^{-2} \log_2(2^x) \, dx = \int_{-4}^{-2} x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2\right]_{-4}^{-2} = \frac{1}{2}(-2)^2 - \frac{1}{2}(-4)^2 = 2 - 8 = \mathbf{-6}$

1.3. Berechne den Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall $[a;b]$.

1.3.1 $f(x) = \sin(x) \;;\; a = 0 \;;\; b = \frac{3\pi}{2}$ Nullstellen im Intervall $[0;1{,}5\pi]$: $x_1 = \pi$. Also

$$A = \left|\int_0^{\pi} \sin(x) \, dx\right| + \left|\int_{\pi}^{1{,}5} \pi \sin(x) dx\right| = \left|[-\cos(x)]_0^{\pi}\right| + \left|[-\cos(x)]_{\pi}^{1{,}5\pi}\right|$$

$$= |-\cos(\pi) - (-\cos(0))| + |-\cos(1{,}5\pi) - (-\cos(\pi))| = |-(-1) - (-1)| + |-0 - (-1)| = 2 + 1 = \mathbf{3}$$

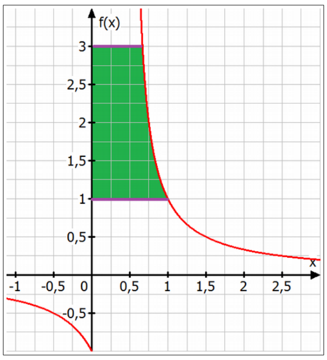
1.3.2 $f(x) = (x+2)(x-1)(x-4) \;;\; a = 1 \;;\; b = 4$

Nullstellen: $x_1 = 1; x_2 = 4; x_3 = -2$. Keine dieser Nullstellen liegt im Intervall $]1;4[$.

$f(x) = (x+2)(x-1)(x-4) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ Also

$$A = \left|\int_1^4 x^3 - 3x^2 - 6x + 8 \, dx\right| = \left|\left[\frac{1}{4} x^4 - x^3 - 3x^2 + 8x\right]_1^4\right| = \left|\frac{1}{4} 4^4 - 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 - \left(\frac{1}{4} - 1 - 3 + 8\right)\right|$$

$$= |4 - 64 - 48 + 32 - 0{,}25 + 1 + 3 - 8| = |-16 - 4{,}25| = |-20{,}25| = \mathbf{20{,}25}$$



1.4. Das Bild rechts zeigt den Graphen der Funktion $f(x)=\frac{1}{2x-1}$.
Berechne den Flächeninhalt der markierten Fläche (y-Achse von 1 bis 3).

Zwei Lösungsmöglichkeiten:

1. Unterteilen der Fläche in ein Rechteck links bis zu der Stelle, an der *f* den Funktionswert $f(x)=3$ hat. Die zweite Fläche geht von dieser Stelle bis zu der Stelle, an der f den Funktionswert $f(x)=1$ hat, und liegt zwischen *f* und $g(x)=1$.

2. Bilden der Umkehrfunktion und Berechnung von $\int_1^3 f^{-1}(x)\,dx$.

Umkehrfunktion: $y=\frac{1}{2x-1} \Leftrightarrow y(2x-1)=1 \Leftrightarrow 2x-1=\frac{1}{y} \Leftrightarrow 2x=1+\frac{1}{y} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2y}$

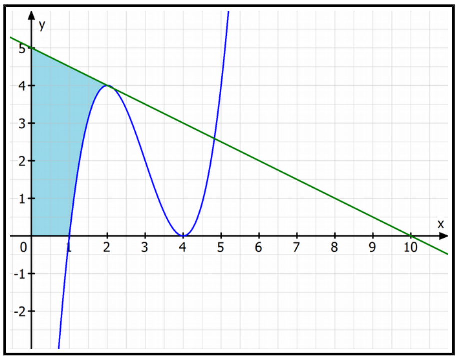
Wir haben die Brüche nicht zusammengefasst, da die Stammfunktion so leicht zu finden ist.

Also $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2x}$. Die Nullstelle liegt bei $x_1=-1$ und die Polstelle bei $x=0$. Zur Flächenberechnung muss das Integral also nicht unterteilt werden.

$$\boldsymbol{A}=\left|\int_1^3 \frac{1}{2}+\frac{1}{2x}dx\right|=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\ln(2x)\right]_1^3=\left|\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\ln(3)-\frac{1}{2}\ln(1)\right|=\left|1+\frac{\ln(3)}{2}\right|\approx\mathbf{1{,}5493}$$

1.5. Für die folgenden Teilaufgaben 1.4. betrachten wir die Funktionen
$f(x)=x^3-9x^2+24x-16$ und $g(x)=-\frac{1}{2}x+5$

1.5.2 Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen von *f* und *g* und von den beiden Koordinatenachsen begrenzt wird.



Gesucht ist die markierte Fläche. (Die Fläche rechts von $x_2=4$ wird nicht von der y-Achse begrenzt).

Nullstellen von *f* und *g*:
$0=x_n^3-9x_n^2+24x_n-16 \Rightarrow x_1=1$ durch Probieren.

$$\begin{aligned}
&(x^3-9x^2+24x-16):(x-1)=x^2-8x+16\\
&\underline{-(x^3-x^2)}\\
&\quad -8x^2+24x-16\\
&\quad \underline{-(-8x^2+\ 8x)}\\
&\qquad\qquad 16x-16\\
&\qquad\qquad \underline{-(16x-16)}\\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow 0=x_n^2-8x_n+16=(x_n-4)^2 \Rightarrow x_2=4$ doppelte NST.

$0=-\frac{1}{2}x_n+5 \Leftrightarrow -5=-\frac{1}{2}x_n \Leftrightarrow x_3=10$

Differenzfunktion $h(x)=g(x)-f(x)=-0{,}5x+5-(x^3-9x^2+24x-16)=-x^3+9x^2-24{,}5x+21$

Nullstellen Differenzfunktion: $0=-x_n^3+9x_n^2-24{,}5x_n+21 \Rightarrow x_4=2$ durch Probieren.

$$
\begin{array}{l}
(-x^3+9x^2-49/2x+21):(x-2)=-x^2+7x-10{,}5 \\
\underline{-(-x^3+2x^2)} \\
\qquad 7x^2-24{,}5x+21 \qquad \Rightarrow 0=-x_n^2+7x_n-10{,}5 \Rightarrow x_{5/6}=3{,}5\pm\sqrt{(-3{,}5)^2-10{,}5}=3{,}5\pm\frac{\sqrt{7}}{2} \\
\qquad \underline{-(7x^2-14\ x)} \\
\qquad\qquad -10{,}5x+21 \qquad \Rightarrow x_5\approx 2{,}18\ ;\ x_6\approx 4{,}82 \\
\qquad\qquad \underline{-(-10{,}5x+21)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

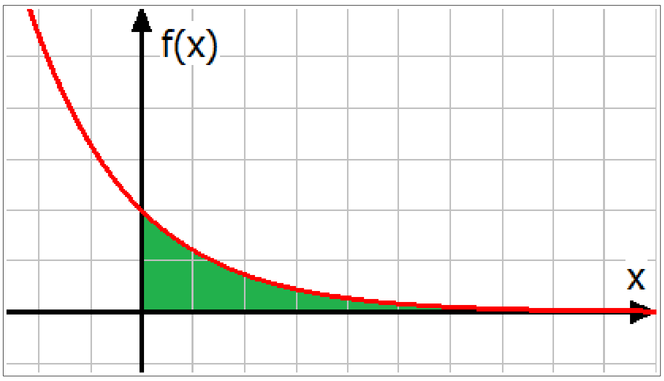
Unterteilung in Teilflächen: $A_1=\left|\int_0^1 g(x)\,dx\right|$ und $A_2=\left|\int_1^2 (g(x)-f(x))\,dx\right|$

$$A_1=\left|\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x+5\right)dx\right|=\left|\left[-\frac{1}{4}x^2+5x\right]_0^1\right|=\left|\left[\frac{19}{4}-0\right]_0^1\right|=\frac{19}{4}$$

$$A_2=\left|\int_1^2 (g(x)-f(x))\,dx\right|=\left|\left[-\frac{x^4}{4}+3x^3-12{,}25x^2+21x\right]_0^1\right|=|13-11{,}5|=1{,}5$$

$$\mathbf{A}=A_1+A_2=4{,}75+1{,}5=\mathbf{6{,}25}$$

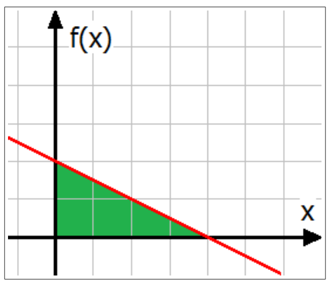
<u>**1.6**</u> Untersuche, ob die Fläche, die zwischen dem Graphen Funktion $f(x)=e^{-x}$ und den Koordinatenachsenachsen im ersten Quadranten liegt, einen endlichen Flächeninhalt hat, und berechne ggf. diesen Flächeninhalt.



Gesucht ist die markierte Fläche.

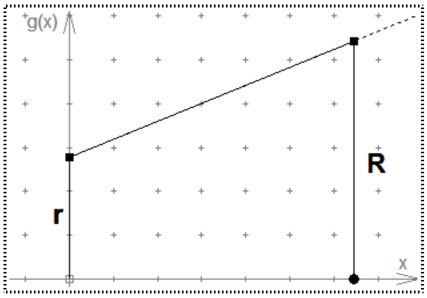
$$A=\int_0^\infty e^{-x}dx=\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-x}dx=\lim_{x\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^x$$
$$\lim_{x\to\infty} -e^{-x}-(-e^{-0})=0+1=\mathbf{1}$$

Gib die Funktionsgleichung einer anderen Funktion an, bei der die entsprechende Fläche den gleichen Flächeninhalt hat.



z.B. $g(x)=-\frac{1}{2}x+1$ oder $h(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x\le 1\\ 0 & \text{für } x>1\end{cases}$

<u>1.7</u> Stelle mit Hilfe der Integralrechnung eine Formel zur Berechnung eines Kegelstumpfes mit der Höhe *h*, dem Radius *R* der Grundfläche und dem Radius r_1 der Deckfläche.



Kontrolllösung: $V=\frac{\pi}{3}\cdot h\cdot(R^2+Rr+r^2)$

Die betrachtete Funktion ist eine Gerade durch den Ursprung

$g(x)=mx+n$ mit $m=\frac{R-r}{h}$ und $n=r$, also $g(x)=\frac{R-r}{h}x+r$.

Das Volumen des Rotationskörpers ist

$$\boldsymbol{V}=\pi\int_0^h g(x)^2dx=V=\pi\int_0^h\left(\frac{(R-r)}{h}x+r\right)^2dx=\pi\int_0^h\frac{(R-r)^2}{h^2}x^2+2\frac{(R-r)}{h}xr+r^2dx$$

$$=\pi\left[\frac{(R-r)^2}{3h^2}x^3+2\frac{(R-r)r}{2h}x^2+r^2x\right]_0^h=\pi\cdot\left(\frac{(R-r)^2}{3h^2}h^3+\frac{(R-r)r}{h}h^2+r^2h-(0+0+0)\right)$$

$$=\pi\left(\frac{1}{3}(R-r)^2h+(R-r)rh+r^2h\right)=\pi h\left(\frac{1}{3}(R-r)^2+(R-r)r+r^2\right)=\frac{1}{3}\pi h\left((R-r)^2+3(R-r)r+3r^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2-2Rr+r^2+3Rr-3r^2+3r^2\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+Rr+r^2\right)}$$

<u>Aufgabe 2:</u> Integrationsmethoden

Berechne die folgenden Integrale (ggf. mit der angegebenen Integrationsmethode) oder bestimme die Stammfunktionenschar.

<u>2.1</u> $\int\frac{3x+1}{4x^2-x-2}dx$ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung.

Linearfaktorzerlegung: $4x^2-x-2=\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right)$

$$0=x^2-\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x_{1/2}=\frac{1}{8}\pm\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}\pm\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{32}{64}}=\frac{1}{8}\pm\frac{\sqrt{129}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$$

Also $4x^2-x-2=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\cdot\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$

Hauptgleichung: $$\frac{3x+1}{4x^2-x-2}=\frac{4(3x+1)}{\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\cdot\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)}=\frac{A}{\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)}+\frac{B}{\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)}$$

Das führt zu der Hauptgleichung: $12x+4=A\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)+B\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$

Setze $x=x_1=\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$ Damit $12(1-\sqrt{33})+4=B\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{12\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)+4}{\left(\frac{1-\sqrt{33}-1-\sqrt{33}}{8}\right)}=B \Leftrightarrow B=\frac{18-2\sqrt{33}}{3}$$

Setze $x=x_2=\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$ Damit $12(1+\sqrt{33})+4=A\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{12\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)+4}{\left(\frac{1+\sqrt{33}-1+\sqrt{33}}{8}\right)}=A \Leftrightarrow A=\frac{18+2\sqrt{33}}{3}$$

Also $\displaystyle \int \boldsymbol{\frac{3x+1}{4x^2-x-2}dx}=\int \frac{18+2\sqrt{33}}{3\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)}dx+\int \frac{18-2\sqrt{33}}{3\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)}dx$

$$=\boldsymbol{\frac{18+2\sqrt{33}}{3}\cdot\ln\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)+\frac{18-2\sqrt{33}}{3}\cdot\ln\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)+C}$$

2.2 $\int (x\ln(x)-x)\,dx$ mit Hilfe der partiellen Integration.

$$\int (x\ln(x)-x)\,dx=\int x\ln(x)\,dx-\int x\,dx \qquad \int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$\int x\ln(x)\,dx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\int \frac{x}{2}\,dx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{4}x^2+C=\frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)+C_2$$

$$\boldsymbol{\int (x\ln(x)-x)\,dx}=\int x\ln(x)dx-\int x\,dx=\frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)-\frac{x^2}{2}+C=\boldsymbol{\frac{x^2}{4}(2\ln(x)-3)+C}$$

2.3 $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{4x-6}\,dx$ mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

Substitution: $z=4x-6$ und Ableitung: $\frac{dz}{dx}=4 \Leftrightarrow dx=\frac{dz}{4}$

$$\int \frac{1}{4x-6}\,dx=\int \frac{1}{z}\frac{dz}{4}=\frac{1}{4}\int \frac{1}{z}\,dz=\frac{1}{4}\ln(z)+C=\frac{1}{4}\ln(4x-6)+C$$

$$\int_2^4 \frac{1}{4x-6}\,dx=\left[\frac{1}{4}\ln(4x-6)\right]_2^4=\frac{1}{4}(\ln(4\cdot 4-6)-\ln(4\cdot 2-6))=\frac{1}{4}(\ln(10)-\ln(2))$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{10}{2}\right)=\frac{1}{4}\ln(5)\approx \mathbf{0{,}4024}$$

2.4 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

Substitution: $x=\sin(z)$ $\frac{dx}{dz}=\cos(z) \Leftrightarrow dx=\cos(z)dz$

Grenzen: $\sin(\overline{a})=0 \Rightarrow \overline{a}=0$ $\sin(\overline{b})=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{b}=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(z)}}\cdot\cos(z)dz=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(z)}\cdot\cos(z)dz=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dz=[z]_0^{\pi/4}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

2.5 $\int \frac{1}{\sqrt{3+3x^2}}dx$ mit Hilfe der Substitution $x=\frac{z^2-1}{2z}$.

Substitution: $\frac{dx}{dz}=\frac{2z\cdot 2z-(z^2-1)\cdot 2}{4z^2}=\frac{4z^2-2z^2+2}{4z^2}=\frac{z^2+1}{2z^2}$

$dx=\frac{z^2+1}{2z^2}dz$ Damit $\int \frac{1}{\sqrt{3+3\left(\frac{z^2-1}{2z}\right)^2}}\frac{z^2+1}{2z^2}dz$

NR: $\frac{1}{\sqrt{3+3\left(\frac{z^2-1}{2z}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{12z^2}{4z^2}+3\cdot\frac{z^4-2z^2+1}{4z^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{12z^2+3z^4-6z^2+3}{4z^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3z^4+6z^2+3}{4z^2}}}$

$=\frac{2z}{\sqrt{3\cdot(z^4+2z^2+1)}}=\frac{2z}{\sqrt{3\cdot(z^2+1)^2}}=\frac{2z}{\sqrt{3}\cdot(z^2+1)}$

Weiter: $\int \frac{2z}{\sqrt{3}\cdot(z^2+1)}\cdot\frac{z^2+1}{2z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\int\frac{1}{z}dz=\frac{\ln(z)}{\sqrt{3}}$

Rücksubstitution: $x=\frac{z^2-1}{2z} \Leftrightarrow 2xz=z^2-1 \Leftrightarrow z^2-2xz-1=0 \Rightarrow z_{1/2}=x\pm\sqrt{x^2+1}$

Damit: $\int \frac{1}{\sqrt{3+3x^2}}dx=\frac{\ln(x\pm\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{3}}=\frac{arcsinh(x)}{\sqrt{3}}$

2.6 $\int \cos^2(x)dx=\int\cos(x)\cos(x)dx=\cos(x)\sin(x)-\int(-\sin(x))\sin(x)dx$

$\int\cos^2(x)dx=\cos(x)\sin(x)+\int\sin^2(x)dx=\cos(x)\sin(x)+\int 1-\cos^2(x)dx$

$\int\cos^2(x)dx=\cos(x)\sin(x)+\int 1\,dx-\int\cos^2(x)dx=\cos(x)\sin(x)+x+C_1-\int\cos^2(x)dx$

$\Leftrightarrow 2\int\cos^2(x)dx=\cos(x)\sin(x)+\int 1\,dx-\int\cos^2(x)dx=\cos(x)\sin(x)+x+C_1$

$\Leftrightarrow \int\cos^2(x)dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}(\cos(x)\sin(x)+x)+C}$ (mit $C=C_1/2$)

2.7 $\int_0^1 \frac{x^4-7x^3+12x^2+4x-16}{x^3-8x^2+20x-16}\,dx$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^4-7x^3+12x^2+\ \ 4x-16):(x^3-8x^2+20x-16)=x+1 \\ \underline{-(x^4-8x^3+20x^2-16x)} \\ \qquad x^3-\ \ 8x^2+20x-16 \\ \quad \underline{-(x^3-\ \ 8x^2+20x-16)} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Also: $\int_0^1 \frac{x^4-7x^3+12x^2+4x-16}{x^3-8x^2+20x-16}\,dx=\int_0^1 x+1\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{2}\cdot 1^2+1-\frac{1}{2}\cdot 0-0=\mathbf{1{,}5}$

2.8

$$\int_{-1}^1 \log_3\left(\frac{\log_b(x^9)}{\log_b(x)}\right)dx=\int_{-1}^1 \log_3\left(\frac{9\cdot\log_b(x)}{\log_b(x)}\right)dx=\int_{-1}^1 \log_3(9)\,dx=\int_{-1}^1 2\,dx=[2x]_{-1}^1=2\cdot 1-2\cdot(-1)=\mathbf{4}$$

2.9 $\int_0^1 \frac{e^x}{x^{-3}}\,dx=\int_0^1 x^3e^x\,dx=[x^3e^x]_0^1-\int_0^1 3x^2e^x\,dx=[x^3e^x]_0^1-\left([3x^2e^x]_0^1-\int_0^1 6xe^x\,dx\right)$

$$=[x^3e^x]_0^1-[3x^2e^x]_0^1+[6xe^x]_0^1-\int_0^1 6e^x\,dx=[x^3e^x]_0^1-[3x^2e^x]_0^1+[6xe^x]_0^1-[6e^x]_0^1$$

$$=(e-0)-(3e-0)+(6e-0)-(6e-6)=e-3\mathrm{e}+6=\mathbf{6-2e}$$