

**Aufgabe 1: Rechnen mit Matrizen und Vektoren**

Gegeben sind die folgenden Zahlen, Vektoren und Matrizen:

$$r = -\frac{1}{2}; \quad s = 5; \quad t = \frac{4}{25}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne, falls möglich, die folgenden Terme oder Ausdrücke. Falls die Berechnung nicht möglich ist, schreibe „ungültig“. Vereinfache so weit wie möglich.

$$\mathbf{1.1} \quad r+t = -\frac{1}{2} + \frac{4}{25} = -\frac{25}{50} + \frac{8}{50} = -\frac{17}{50}$$

$$\mathbf{1.2} \quad |\vec{a}| \cdot \vec{c} = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{10} \\ 2\sqrt{10} \\ -\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1.3} \quad D \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1.4} \quad \det A = \text{ungültig} \quad (\text{weil nicht quadratisch})$$

$$\mathbf{1.5} \quad t^r = \left( \frac{4}{25} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\mathbf{1.6} \quad \vec{a} \cdot A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \text{ungültig} \quad (\text{Vektor mal Matrix geht nur für einzeilige Matrizen})$$

$$\mathbf{1.7} \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 12 \\ 2 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1.8} \quad \det C = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

**1.9**  $r \cdot \vec{d} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

**1.10**  $(\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot F = \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{ungültig}$  (weil  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  untersch. Dimension)

**1.11**  $C \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -22 & -30 \\ 4 & 10 & 16 \\ 5 & 11 & 17 \end{pmatrix}$

**1.12**  $\det G = \text{ungültig}$  (weil  $G$  nicht quadratisch)

**1.13**  $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}} = \sqrt{-16} = \text{ungültig}$

**1.14**  $\vec{a} \times \vec{b} = \text{ungültig}$  (weil das Kreuzprodukt nur im  $\mathbb{R}^3$  definiert)

**1.15**

$$\text{rang}(D) = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

**1.16** Schnelle Lösung:  $D$  ist nicht invertierbar, weil  $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  und  $\text{rang } D = 2$ . Wenn man die Zeilen mit Nullen nicht berücksichtigt, ist  $D$  keine quadratische Matrix.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-3\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} \cdot (-2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}+4\text{II}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$D$  kann nicht in die Diagonalfom gebracht werden und ist somit nicht invertierbar.

**Aufgabe 2: Return of the GRÄ**

Wir alle erinnern uns an die Schlacht der GRÄ (Gruppe radikaler Ägyptologen) gegen das Borg-Raumschiff. Am Ende steuerte der inkompetente Kapitän sein Schiff in eine große Kollision, so dass beide Schiffe explodierten. Die meisten Besatzungsmitglieder sind dabei umgekommen. Er selbst hat sich kurz vorher mit Hilfe einer Rettungskapsel in Sicherheit gebracht.

Dafür wurde er natürlich befördert.

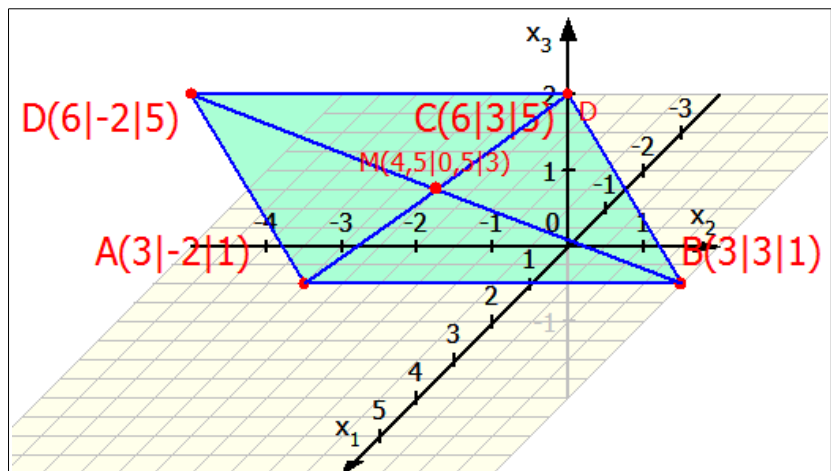
Jetzt ist er mit seinem brandneuen oktaederförmigen<sup>1</sup> Raum auf Suche nach neuem Ruhm. Er trifft auf den halb fertig gebauten Todesstern des Imperiums, der exakt die Form einer Halbkugel hat. Bekannterweise haben Todessterne immer einen Schacht, in den man eine Bombe werfen muss, damit alles explodiert.

Was kann schon schief gehen?

*Die Koordinaten in den folgenden Aufgaben sind in irgendeiner futuristischen, aber sinnvollen Maßeinheit angegeben.*

**2.1 Berechnungen zum Oktaeder**

Zum betrachteten Zeitpunkt haben drei Eckpunkte des Quadrates  $ABCD$  die Koordinaten  $A(3|-2|1)$ ,  $B(3|3|1)$  und  $C(6|3|5)$ .



**2.1.1** Berechne die Koordinaten des Punktes  $D$ . (Kontrolllösung:  $D(6|-2|5)$ )

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{a} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6-3 \\ 3-3 \\ 5-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**2.1.2** Berechne die Kantenlänge der zwölf Kanten des Oktaeders nur mit Hilfe der Koordinaten der Punkte  $A$  und  $C$ . (Kontrolllösung:  $a = 5 \text{ L. E.}$ )

Berechne die Diagonale:

$$\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad d = |\vec{AC}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{50}$$

Das ist die Diagonale  $d$  eines Quadrates. Für die Seitenlänge  $a$  gilt:

<sup>1</sup> Was ist besser als eine Pyramide? Natürlich zwei Pyramiden, die man übereinander setzt!

$$a^2 + a^2 = d^2 \Leftrightarrow 2a^2 = d^2 \Rightarrow a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{25} = 5 \text{ L.E.}$$

**A: Die Kantenlänge des Oktaeders beträgt 5 L.E.**

**2.1.3** Berechne die Höhe des Oktaeders, also die Länge der Strecke  $\overline{S_1 S_2}$ .

$$\text{Höhe einer Pyramide: } \left(\frac{1}{2}d\right)^2 + h^2 = a^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{d^2}{4} = 25 - \frac{50}{4} = 12,5 \Rightarrow h = \sqrt{12,5}$$

$$\text{Abstand } \overline{S_1 S_2} = 2h = \sqrt{50} \text{ L.E.} \approx 7,071 \text{ L.E.}$$

**A: Das Oktaeder hat die Höhe 7,07 L.E. .**

**2.1.4** Berechne den Mittelpunkt  $M_O$  des Oktaeders. Berechne den Abstand des Mittelpunktes zu einer beliebigen Seitenfläche. (Kontrolllösung:  $M_O(4,5|0,5|3)$ )

$$\text{Mittelpunkt des Quadrats ABC: } \vec{m}_O = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1,5 \\ -2+2,5 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Zur Abstandsberechnung brauchen wir die Ebenengleichung einer Ebene, in der eine Seitenfläche liegt. Dazu brauchen wir einen der beiden Punkte  $S_1$  oder  $S_2$ , die wir noch nicht berechnet haben. Benutze also die Kontrolllösung aus 2.1.5. und berechne die Ebene für  $ADS_1$

$$\vec{n} = \vec{DA} \times \vec{DS}_1 = \begin{pmatrix} 3-6 \\ -2-(-2) \\ 1-5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,6716-6 \\ 0,5-(-2) \\ 5,1213-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4,3284 \\ 2,5 \\ 0,1213 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17,68 \\ -7,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normaleneinheitsvektor: } \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 17,68 \\ -7,5 \end{pmatrix}}{\sqrt{10^2 + 17,68^2 + (-7,5)^2}} = \frac{1}{21,6523} \cdot \vec{n}$$

Wähle  $\vec{d}$  als Stützvektor und erhalte die Hesse'sche Normaleform  $E: (\vec{d} - \vec{x}) \cdot \vec{n}_0 = 0$

$$\begin{aligned} \text{Abstand: } d &= |(\vec{d} - \vec{m}_O) \cdot \vec{n}_0| = \left| \left[ \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 17,68 \\ -7,5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{21,6523} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2,5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 17,68 \\ -7,5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{21,6523} \right| \\ &= \left| \frac{1,5 \cdot 10 - 2,5 \cdot 17,68 - 2 \cdot 7,5}{21,6523} \right| = \left| \frac{-221}{21,6523} \right| = |-2,0414| = \mathbf{2,0414} \end{aligned}$$

**2.1.5** Berechne die Koordinaten der beiden Spitzen der Doppelpyramide.

$$\vec{DB} = \vec{b} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{Normalenvektor auf Quadrat: } \vec{n} = \vec{AC} \times \vec{DB} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Normaleneinheitsvektor:  $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{(-40)^2 + 0^2 + 30^2}} \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2500}} \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0 \\ 0,6 \end{pmatrix}$

Spitze  $S_1$ :  $\vec{s}_1 = \vec{m}_O + \sqrt{12,5} \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sqrt{12,5} \cdot \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0 \\ 0,6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4,5 - 2,8284 \\ 0,5 + 0 \\ 3 + 2,1213 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,6716 \\ 0,5 \\ 5,1213 \end{pmatrix}$

$S_1(1,6716|0,5|5,1213)$

Spitze  $S_2$ :  $\vec{s}_2 = \vec{m}_O - \sqrt{12,5} \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} - \sqrt{12,5} \cdot \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0 \\ 0,6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4,5 + 2,8284 \\ 0,5 + 0 \\ 3 - 2,1213 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,3284 \\ 0,5 \\ 0,8787 \end{pmatrix}$

$S_2(7,3284|0,5|0,8787)$

**2.1.6** Untersuche, ob es im Oktaeder zueinander parallele Seitenflächen gibt, und benenne diese ggf.

Hierfür kommen nur gegenüberliegende Seitenflächen in Frage, also z.B.  $DAS_1$  und  $BCS_2$ . Die Flächen sind parallel, wenn die Ebenen, in denen sie liegen, parallel zueinander sind. Zwei Ebenen sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren parallel zueinander sind.

Richtungsvektor erste Ebene:

$$\vec{n}_1 = \vec{DA} \times \vec{DS}_1 = \begin{pmatrix} 3-6 \\ -2-(-2) \\ 1-5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,6716-6 \\ 0,5-(-2) \\ 5,1213-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4,3284 \\ 2,5 \\ 0,1213 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17,68 \\ -7,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2 = \vec{BC} \times \vec{BS}_2 = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 3-3 \\ 5-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7,3284-3 \\ 0,5-3 \\ 0,8787-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4,3284 \\ -2,5 \\ -0,1213 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17,68 \\ -7,5 \end{pmatrix}$$

Die beiden Normalenvektoren identisch. Also sie auch parallel und damit sind auch die zugehörigen Ebenen parallel zueinander.

**A: Gegenüberliegende Seiten des Oktaeders sind parallel zueinander.**

**2.1.7** Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt des Oktaeders.

Zwei Pyramiden übereinander.

Kantenlänge  $a=5$  (siehe 2.1.2), Höhe einer Pyramide  $h=\sqrt{12,5}$  (siehe 2.1.3)

$$V_{Okt} = 2 \cdot V_{Pyr} = \frac{2 \cdot 1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{2}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 5^2 \cdot \sqrt{12,5} \approx 58,9256$$

$$O_{Okt} = 8 \cdot A_{Dr} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 5^2 = 50\sqrt{3} = 86,60 \text{ F.E.}$$

**A: Das GRÄ-Raumschiff hat ein Volumen von ca. 59 V.E und einen Oberflächeninhalt von ca. 87 F.E. .**

**2.1.8** Berechne die Winkel zweier benachbarter Seitenflächen. Ist dieser Winkel für alle benachbarten Seitenflächen gleich? Wenn ja, erkläre warum. Wenn nein, berechne die anderen Winkel.

Der Winkel zweier benachbarter Seitenflächen ist gleich dem Winkel der Normalvektoren zueinander. Betrachte die Flächen  $DAS_1$  und  $ABS_1$ .

$$\vec{n}_1 = \vec{DA} \times \vec{DS}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 17,68 \\ -7,5 \end{pmatrix} \quad (\text{siehe 2.1.6})$$

Damit man den richtigen Winkel auf der Innenseite berechnet, muss man nehmen und nicht Alternativ muss man den errechneten Winkel von  $180^\circ$  subtrahieren.

$$\vec{n}_3 = \vec{BA} \times \vec{AS}_1 = \begin{pmatrix} 3-3 \\ -2-3 \\ 1-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,6716-3 \\ 0,5-(-2) \\ 5,1213-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1,3284 \\ 2,5 \\ 4,1213 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20,61 \\ 0 \\ -6,64 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{10 \cdot (-20,61) + 17,68 \cdot 0 + (-7,5) \cdot (-6,64)}{\sqrt{10^2 + 17,68^2 + (-7,5)^2} \cdot \sqrt{(-20,61)^2 + 0^2 + (-6,64)^2}} = \frac{-15,63}{21,65 \cdot 21,65} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos(-1/3) = 109,47^\circ$$

Der Winkel muss für alle Flächen gleich groß sein, denn alle Seitenflächen sind gleich. Dies ist nur möglich, wenn auch die Winkel für alle Flächen gleich sind.

## 2.2 Berechnungen zur Halbkugel

**2.2.1** Der vollständige Todesstern lässt sich mit der Kugelgleichung

$x_1^2 - 1000x_1 + x_2^2 - 400x_2 + x_3^2 - 600x_3 = -130000$  beschreiben. Berechne den Radius  $r$  und den Mittelpunkt  $M_K$  des vollständigen Todessterns.

Kugelgleichung für Kugel mit Mittelpunkt  $M(m_1|m_2|m_3)$  und dem Radius  $r$ :

$$(m_1 - x_1)^2 + (m_2 - x_2)^2 + (m_3 - x_3)^2 = r^2$$

Forme Kugelgleichung des Todessterns um:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 1000x_1 + x_2^2 - 400x_2 + x_3^2 - 600x_3 &= -130000 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 1000x_1 + 500^2 - 500^2 + x_2^2 - 400x_2 + 200^2 - 200^2 + x_3^2 - 600x_3 + 300^2 - 300^2 &= -130000 \\ \Leftrightarrow (x_1 - 500)^2 - 500^2 + (x_2 - 200)^2 - 200^2 + (x_3 - 300)^2 - 300^2 &= -130000 \\ \Leftrightarrow (x_1 - 500)^2 + (x_2 - 200)^2 + (x_3 - 300)^2 &= -130000 + 500^2 + 200^2 + 300^2 \\ \Leftrightarrow (x_1 - 500)^2 + (x_2 - 200)^2 + (x_3 - 300)^2 &= 250000 \\ \Leftrightarrow (x_1 - 500)^2 + (x_2 - 200)^2 + (x_3 - 300)^2 &= 500^2 \end{aligned}$$

**A: Der Mittelpunkt ist  $M_K(500|200|300)$  und der Radius beträgt  $r=500$  L. E..**

**2.2.2** Allerdings ist der Todesstern unvollständig und hat die Form einer Halbkugel. Der Punkt  $P(500|200|-200)$  befindet sich auf dem Rand des Kreises, der die Basis dieser Halbkugel darstellt. Der Mittelpunkt  $M_O$  des GRÄ-Schiffes befindet sich auf der Ebene  $E$ , in welcher dieser Halbkreis liegt.

Prüfe zunächst, ob sich der Punkt  $P$  auf dem Rand der vollständigen Kugel befindet.

Stelle eine Ebenengleichung für die Ebene  $E$  auf.

Prüfe, ob der Punkt  $(500|200|-200)$  auf der vollständigen Kugel liegt:

$$\begin{aligned} (500-500)^2 + (200-200)^2 + (-200-300)^2 &= 500^2 \\ \Leftrightarrow 0+0+(-500)^2 &= 500^2 \\ \Leftrightarrow 250000 &= 250000 \quad \text{o.k.} \end{aligned}$$

Konstruiere Ebene aus drei Punkten:  $P(500|200|-200)$ ;  $M_K(500|200|300)$ ;  $M_O(4,5|0,5|3)$

$$E: \vec{x} = \vec{m}_k + r \cdot \vec{M}_K P + s \cdot \vec{M}_K M_O$$

$$\vec{M}_K P = \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \\ -200 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix}; \quad \vec{M}_K M_O = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -495,5 \\ -199,5 \\ -297 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \vec{m}_k + r \cdot \vec{M}_K P + s \cdot \vec{M}_K M_O = \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -495,5 \\ -199,5 \\ -297 \end{pmatrix}$$

**2.2.3** Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt des Todessterns.

$$\text{Volumen Halbkugel: } V = \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 500^3 = 261.799.387,8 \text{ V.E.}$$

$$\text{Oberfläche Halbkugel: } O_H = 2 \pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 500^2 = 1.570.796,327 \text{ F.E.}$$

$$\text{Fläche Grundkreis: } O_K = \pi r^2 = \pi \cdot 500^2 = 250.000 \pi \approx 785.398,1634$$

$$\text{Oberfläche Todesstern: } O_T = O_H + O_K = 2.356.194,49.786 \text{ V.E.}$$

**A: Das Volumen des Todessterns beträgt 262 MKFSE. (Mega-Kubik-Futuristische-Sinnvolle-Einheiten) und der Oberflächeninhalt ist 2,36 MQFSE.**

### 2.3 Berechnungen zur Raumschlacht

Der Schacht, in welcher der Torpedo geworfen werden muss, beginnt an der Oberfläche der Kugel und zeigt senkrecht in Richtung Kugelmitte. Das GRÄ-Raumschiff befindet sich auf einem Kurs, der es in 50 FSE<sup>2</sup> Entfernung genau senkrecht über dem Schacht an dem Todesstern vorbei führt. Berechne eine mögliche Position des Schachteingangs an der Halbkugeloberfläche.

*Hinweis: Benutze den Mittelpunkt des Oktaeders als Basis für die Berechnungen.*

2 FSE: Futuristische, sinnvolle Einheit

Der Kurs des Raumschiffes berührt tangential eine Kugel, die um den Radius 50 größer ist als die Kugel des Todessterns. Nenne diesen Berührungspunkt  $T$ .

Die Verbindungsvektoren vom Mittelpunkt des Raumschiffes zum Berührungspunkt und vom Berührungspunkt zum Mittelpunkt des Kreises stehen senkrecht aufeinander. Es gilt also:

$$\vec{M}_O T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 - 4,5 \\ t_2 - 0,5 \\ t_3 - 3 \end{pmatrix} ; \vec{M}_K T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 - 500 \\ t_2 - 200 \\ t_3 - 300 \end{pmatrix}$$

Es gilt:  $(\vec{M}_O T) \cdot (\vec{M}_K T) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} t_1 - 4,5 \\ t_2 - 0,5 \\ t_3 - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 - 500 \\ t_2 - 200 \\ t_3 - 300 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t_1 - 4,5)(t_1 - 500) + (t_2 - 0,5)(t_2 - 200) + (t_3 - 3)(t_3 - 300) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t_1^2 - 500t_1 - 4,5t_1 + 2250) + (t_2 - 0,5)(t_2 - 200) + (t_3 - 3)(t_3 - 300) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t_1^2 - 504,5t_1 + 2250) + (t_2 - 0,5)(t_2 - 200) + (t_3 - 3)(t_3 - 300) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t_1^2 - 504,5t_1 - 252,25^2 - 252,25^2 + 2250) + (t_2 - 0,5)(t_2 - 200) + (t_3 - 3)(t_3 - 300) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t_1 - 252,25)^2 - 61.380,0625 + (t_2 - 0,5)(t_2 - 200) + (t_3 - 3)(t_3 - 300) = 0 \quad (1)$$

$T$  liegt auf einer Kugel mit dem Radius  $500+50$  und dem Mittelpunkt  $M_K$ . Es gilt also:

$$(t_1 - 500)^2 + (t_2 - 200)^2 + (t_3 - 300)^2 = 550^2$$

$$\Leftrightarrow (t_1 - 500)^2 = 550^2 - (t_2 - 200)^2 - (t_3 - 300)^2 \quad (2). \text{ Einsetzen in (1):}$$

$$\Leftrightarrow (t_1 - 252,25)^2 + (t_2 - 0,5)(t_2 - 200) + (t_3 - 3)(t_3 - 300) = 61.380,0625$$

$$\Leftrightarrow 550^2 - (t_2 - 200)^2 - (t_3 - 300)^2 + (t_2 - 0,5)(t_2 - 200) + (t_3 - 3)(t_3 - 300) = 61.380,0625 \quad | -550^2$$

$$\Leftrightarrow -(t_2 - 200)^2 - (t_3 - 300)^2 + (t_2 - 0,5)(t_2 - 200) + (t_3 - 3)(t_3 - 300) = -241.119,9375$$

$$\Leftrightarrow -(t_2 - 200)^2 + (t_2 - 0,5)(t_2 - 200) = -241.119,9375 + (t_3 - 300)^2 - (t_3 - 3)(t_3 - 300)$$

$$\Leftrightarrow -(t_2^2 - 400t_2 + 200^2) + (t_2^2 - 200t_2 - 0,5t_2 + 100) = -241.119,9375 + (t_3 - 300) \cdot [(t_3 - 300) - (t_3 - 3)]$$

$$\Leftrightarrow -t_2^2 + 400t_2 - 200^2 + t_2^2 - 200t_2 - 0,5t_2 + 100 = -241.119,9375 + (t_3 - 300) \cdot (-297)$$

$$\Leftrightarrow -199,5t_2 = -241.119,9375 + 39900 + 89.100 - 297t_3$$

$$\Leftrightarrow -199,5t_2 = -112.119,9375 - 297t_3$$

$$\Leftrightarrow t_2 = 562,00469921 + 1,488721805t_3$$

Mit den Angaben in der Aufgabe ist nicht zu errechnen, ob sich die Halbkugel oberhalb oder unterhalb der Ebene  $E$  befindet. Daher ist es egal, mit welchem Wert man für  $t_3$  wählt, solange sich für  $t_1$  und  $t_2$  gültige Werte ergeben.

Wähle  $t_3 = 0$ . Einsetzen:  $\Rightarrow t_2 = 562,00469921$

Einsetzen in (2):

$$\Rightarrow (t_1 - 500)^2 = 550^2 - (562,00469921 - 200)^2 - (0 - 300)^2$$



$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (t_1 - 500)^2 &= 550^2 - (362,00469921 - 200)^2 - (0 - 300)^2 \\ \Leftrightarrow (t_1 - 500)^2 &= 550^2 - (362,00469921)^2 - (-300)^2 \\ \Leftrightarrow (t_1 - 500)^2 &= 302.500 - 131.047,4022 - 90.000 \\ \Leftrightarrow (t_1 - 500)^2 &= 81.452,5978 \\ \Leftrightarrow t_1 - 500 &= \pm \sqrt{81.452,5978} \\ \Leftrightarrow t_1 - 500 &= \pm 285,3990151 \\ \Rightarrow t_{11} &= -285,3990151 + 500 = 214,6009849 \quad ; \quad t_{12} = 285,3990151 + 500 = 785,3990151 \end{aligned}$$

Also ist eine mögliche Lösung:  $\vec{t} = \begin{pmatrix} 214,6009849 \\ 562,0046991 \\ 0 \end{pmatrix}$

Das ist aber der Punkt, der 50 FSE vom gesuchten Eingang des Schachts S entfernt ist. Es gilt:

$$\vec{s} = \vec{t} + 50 \cdot \frac{\vec{TM}_K}{|\vec{TM}_K|} \quad \vec{TM}_K = \vec{m}_K - \vec{t} = \begin{pmatrix} 500 - 214,6009849 \\ 200 - 562,0046991 \\ 300 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 285,3990151 \\ -362,0046991 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{TM}_K| = \sqrt{285,3990151^2 + (-362,0046991)^2 + 300^2} = \sqrt{302500} = 550$$

(Das wussten wir schon, aber nun wissen wir, dass wir uns nicht verrechnet haben).

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 214,6009849 \\ 562,0046991 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{50}{550} \cdot \begin{pmatrix} 285,3990151 \\ -362,0046991 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250,5463499 \\ 529,095181 \\ 27,27 \end{pmatrix}$$

**A: Der Schachteingang könnte sich im Punkt S(251|529|27) befinden.**