

**Aufgabe 1: Rechnen mit Vektoren**

Berechne... und vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich. Falls der Term keinen gültigen Ausdruck darstellt, schreibe „ungültig“.

$$1.1 \quad \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}}{\frac{1}{8}} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ -80 \end{pmatrix}$$

$$1.2 \quad \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right| + \frac{1}{5} = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right| + \frac{1}{5} = \sqrt{0^2+5^2+5^2} + 0,2 = \sqrt{50} + 0,2 = \frac{1+25\sqrt{2}}{5} \approx 7,2712$$

$$1.3 \quad \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2+2^2+(-2)^2+4^2} \cdot (3 \cdot (-5) + 4 \cdot 12) = \sqrt{28} \cdot 33 = 66 \cdot \sqrt{7} \approx 174,6196$$

$$1.4 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ungültig, weil das Kreuzprodukt nicht für Vektoren im } \mathbb{R}^2 \text{ definiert ist.}$$

$$1.5 \quad \dots \text{den Winkel zwischen } \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\phi) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right|} = \frac{0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 3 \cdot 12}{\sqrt{0^2+(-3)^2+3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2+0^2+12^2}} = \frac{36}{\sqrt{18} \cdot 148} = \frac{3\sqrt{74}}{37} \Rightarrow \phi = 0,7989 = 45,77^\circ$$

$$1.6 \quad \dots \text{den Gegenvektor zum Einheitsvektor von } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{a}_0 = -\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{24}} \\ \frac{-2}{\sqrt{24}} \\ \frac{4}{\sqrt{24}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

**1.7** ...die fehlenden Koordinaten des Vektors  $\begin{pmatrix} 6 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ , der senkrecht sowohl zu  $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$  als auch zu  $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$  steht.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 12 - 0 \cdot 3 \\ (-2) \cdot 3 - 0 \cdot 12 \\ 0 \cdot 0 - (-2) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor hat die richtige Richtung, aber die falsche  $x_1$ -Koordinate.

$$\begin{pmatrix} -36 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -36 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor  $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  steht senkrecht zu den anderen Vektoren und hat die richtige  $x_1$ -Koordinate.

**1.8** ...den Flächeninhalt des von  $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$  aufgespannten Parallelogramms.

$$A = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \cdot 12 - 0 \cdot 3 \\ (-2) \cdot 3 - 0 \cdot 12 \\ 0 \cdot 0 - (-2) \cdot (-3) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -36 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-36)^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1368} = 6 \cdot \sqrt{38} \approx 36,99 F.E.$$

**1.9** ...das Volumen des von  $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und aufgespannten Spats.

$$V = \left| \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \cdot 4 - 0 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-2) - 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 0 - (-3) \cdot (-2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= |-12 \cdot 1 + (-6) \cdot 1 + (-6) \cdot 1| = |-24| = 24 V.E.$$

**1.10** ...den Flächeninhalt des durch die Vektoren  $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$  definierten Dreiecks.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist gleich dem halben Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 6 \sqrt{38} = 3 \sqrt{38} \approx 18,49 F.E. \quad (\text{siehe Aufgabe 1.8})$$

**1.11** Löse die Aufgabe 1.7 ohne das Kreuzprodukt zu verwenden.

Gesucht ist ein Vektor  $\vec{n}$  mit  $n_1=6$ , für den gilt:  $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0$  und  $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0$

Daraus ergibt sich das LGS:

I.  $0 \cdot 6 + (-3) \cdot n_2 + 3 \cdot n_3 = 0$

II.  $-2 \cdot 6 + 0 \cdot n_2 + 12 \cdot n_3 = 0$

I.  $-3n_2 + 3n_3 = 0$

II.  $-12 + 12 \cdot n_3 = 0 \Leftrightarrow 12n_3 = 12 \Leftrightarrow n_3 = 1$  Setze  $n_3 = 1$  in I. ein:

I.  $-3n_2 + 3 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow -3n_2 = -3 \Leftrightarrow n_2 = 1$

Der Vektor  $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist die gesuchte Lösung.

**Aufgabe 2: Lineare Abhängigkeit / - Unabhängigkeit**

**2.1** Entscheide mit Hilfe einer Rechnung, ob der Satz von Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig ist.

**2.1.1**  $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Zwei Vektoren sind linear abhängig, wenn sie Vielfache voneinander sind:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{I. } 2 = k \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 4 \\ \text{II. } 8 = k \cdot \frac{1}{8} \Leftrightarrow k = 64 \end{matrix} \quad \text{Es gibt kein } k, \text{ dass beide Gleichungen erfüllt.}$$

Die Vektor sind linear unabhängig!

**2.1.2**  $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{I. } 2 = k \cdot \frac{1}{8} \Leftrightarrow k = 16 \\ \text{II. } 8 = k \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 16 \end{matrix}$

Die Vektor sind linear abhängig!

**2.1.3**  $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Vektor sind linear abhängig, denn im  $\mathbb{R}^n$  können maximal  $n$  Vektoren linear unabhängig sein.

$$\mathbf{2.1.4} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Satz von Vektoren ist linear unabhängig, wenn die Gleichungen

$$k_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{als einzige Lösung } k_1 = k_2 = k_3 = 0 \text{ hat.}$$

$$I. \quad -k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \quad | \quad I. - 2II.$$

$$II. \quad 4k_1 + 5k_2 + k_3 = 0$$

$$III. \quad 3k_1 + 2k_2 + 2k_3 = 0 \quad | \quad III. - 2II.$$

$$Ia. \quad -9k_1 - 9k_2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -k_2$$

$$IIIa. \quad -5k_1 - 8k_2 = 0$$

Setze  $k_1 = -k_2$  in III.a ein:  $-5(-k_2) - 8k_2 = 0 \Leftrightarrow -3k_2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = 0$

Einsetzen in Ia.:  $k_1 = -k_2 = 0$

Einsetzen von  $k_1 = k_2 = 0$  in I.:  $0 + 0 + 2k_3 = 0 \Leftrightarrow k_3 = 0$

Einzige Lösung:  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , also sind die Vektoren linear unabhängig.

$$\mathbf{2.1.5} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$I. \quad k_1 - 2k_2 + 4k_3 = 0 \quad | \quad II. - 2I.$$

$$II. \quad 2k_1 + k_2 + 3k_3 = 0$$

$$III. \quad k_1 + 3k_2 - k_3 = 0 \quad | \quad II. - 2III.$$

$$Ia. \quad 5k_2 - 5k_3 = 0 \quad | \quad Ia. + IIIa.$$

$$IIIa. \quad -5k_2 + 5k_3 = 0$$

$$Ib. \quad 0 = 0$$

Es gibt unendlich viele Lösungen, also sind die Vektoren linear abhängig.

**2.2** Stelle den Vektor  $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$  als Linearkombination der Vektoren aus Aufgabe 2.1.5 dar.

$$\Rightarrow k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

I.  $k_1 - 2k_2 + 4k_3 = -3$  | II.  $-2I$ .

II.  $2k_1 + k_2 + 3k_3 = 4$

III.  $k_1 + 3k_2 - k_3 = 7$  | II.  $-2III$ .

Ia.  $5k_2 - 5k_3 = 10 \Leftrightarrow 5k_2 = 5k_3 + 10 \Leftrightarrow k_2 = k_3 + 2$

IIIa.  $-5k_2 + 5k_3 = -10 \Leftrightarrow -5k_2 = -5k_3 - 10 \Leftrightarrow k_2 = k_3 + 2$

Auch hier gibt es wieder unendlich viele Lösungen. Wähle  $k_3 = 1 \Rightarrow k_2 = 1 + 2 = 3$

Setze  $k_3 = 1$  und  $k_2 = 3$  in I. ein:  $k_1 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = -3 \Leftrightarrow k_1 - 6 + 4 = -3 \Leftrightarrow k_1 = -1$

Also als Lösung:  $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 3:** Gegeben ist der Stumpf einer dreieitigen Pyramide mit den Eckpunkten

$$A(-2|-2|0), B(0|0|0), C(-2|2|1), E\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mid -\frac{1}{\sqrt{2}} \mid 2\sqrt{2}\right).$$

Die Spitze der vollständigen Pyramide liegt im Punkt  $S(2|-2|8)$ .

**3.1** Untersuche (in der angegebenen Reihenfolge), ob die Dreiecke ABC, ABS, BCS und ACS rechtwinklig sind.

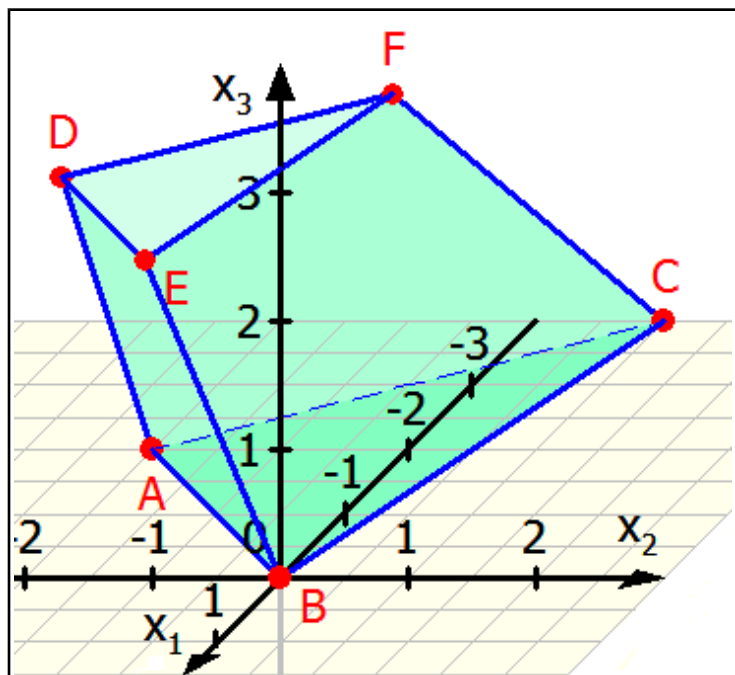
Dreieck ABC besteht aus den Seiten  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  und  $\overline{CA}$

$$\overline{AB} = |\vec{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}|$$

$$\overline{BC} = |\vec{BC}| = |\vec{c} - \vec{b}|$$

$$\overline{CA} = |\vec{CA}| = |\vec{a} - \vec{c}|$$

$$\begin{aligned} |\vec{b} - \vec{a}| &= \left| \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 0 - (-2) \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} \end{aligned}$$



$$|\vec{c}-\vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} -2-0 \\ 2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2)^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{a}-\vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} -2-(-2) \\ -2-2 \\ 0-1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2+(-4)^2+(-1)^2} = \sqrt{17}$$

Rechtwinkligkeit: Mit Satz des Pythagoras überprüfen oder jeweils paarweise die Seitenvektoren mit dem Skalarprodukt auf Rechtwinkligkeit testen.

Satz des Pythagoras: Längste Seite ist  $\overline{CA}$ , also müsste dies die Hypotenuse sein.

$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \sqrt{17}^2 = \sqrt{8}^2 + 3^2 \Leftrightarrow 17 = 8 + 9 \text{ o.k., also rechtwinklig.}$$

Dreieck ABS besteht aus den Seiten  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BS}$  und  $\overline{SA}$

$$\overline{AB} = |\vec{AB}| = |\vec{b}-\vec{a}| = \sqrt{8} \text{ s.o.}$$

$$\overline{BS} = |\vec{BS}| = |\vec{s}-\vec{b}|$$

$$|\vec{s}-\vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 2-0 \\ -2-0 \\ 8-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2+(-2)^2+8^2} = \sqrt{72} = 6 \cdot \sqrt{2}$$

$$\overline{SA} = |\vec{SA}| = |\vec{a}-\vec{s}|$$

$$|\vec{a}-\vec{s}| = \left| \begin{pmatrix} -2-2 \\ -2-(-2) \\ 0-8 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2+0^2+(-8)^2} = \sqrt{80} = 4 \cdot \sqrt{5}$$

Satz des Pythagoras: Längste Seite ist  $\overline{SA}$ , also müsste dies die Hypotenuse sein.

$$\overline{SA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BS}^2 \Leftrightarrow \sqrt{80}^2 = \sqrt{72}^2 + \sqrt{8}^2 \Leftrightarrow 80 = 72 + 8 \text{ o.k., also rechtwinklig.}$$

Dreieck BCS besteht aus den Seiten  $\overline{BC}$ ,  $\overline{SC}$  und  $\overline{SB}$

$$\overline{BC} = |\vec{BC}| = |\vec{c}-\vec{b}| = 3 \text{ s.o.; } \overline{SB} = \overline{BS} = |\vec{BS}| = |\vec{s}-\vec{b}| = \sqrt{72} \text{ s.o.}$$

$$\overline{SC} = |\vec{SC}| = |\vec{c}-\vec{s}| = \left| \begin{pmatrix} -2-2 \\ 2-(-2) \\ 1-8 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2+4^2+(-7)^2} = \sqrt{81} = 9$$

Satz des Pythagoras: Längste Seite ist  $\overline{SC}$ , also müsste dies die Hypotenuse sein.

$$\overline{SC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{SB}^2 \Leftrightarrow 9^2 = \sqrt{72}^2 + 3^2 \Leftrightarrow 81 = 72 + 9 \text{ o.k., also rechtwinklig.}$$

Dreieck ACS besteht aus den Seiten  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CS}$  und  $\overline{SA}$

$$\overline{AC} = \overline{CA} = |\vec{CA}| = |\vec{a}-\vec{c}| = \sqrt{17} \text{ s.o.}$$

$$\overline{CS} = \overline{SC} = |\vec{SC}| = |\vec{c}-\vec{s}| = 9 \text{ s.o.}$$

$$\overline{SA} = |\vec{SA}| = |\vec{a}-\vec{s}| = \sqrt{80} \text{ s.o.}$$

Satz des Pythagoras: Längste Seite ist  $\overline{CS}$ , also müsste dies die Hypotenuse sein.

$$\overline{CS}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{SA}^2 \Leftrightarrow 9^2 = \sqrt{17}^2 + \sqrt{80}^2 \Leftrightarrow 81 = 17 + 80 \text{ unwahr, also nicht rechtwinklig.}$$

**3.2** Berechne die Höhe des Pyramidenstumpfes.

Die Seite  $\overline{BE}$  steht senkrecht auf der Grundfläche des Pyramidenstumpfes, weil der Vektor  $\vec{BE}$  ein Vielfaches des Vektors  $\vec{BS}$  ist, der senkrecht auf der Grundfläche steht (siehe 3.1). Die Länge der Seite  $\overline{BE}$  ist also gleichzeitig die Höhe des Stumpfes.

$$h_s = \overline{BE} = |\vec{BE}| = |\vec{E} - \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4 \cdot 2} = \sqrt{9} = 3 \text{ L. E.}$$

**3.3** Berechne das Volumen der Pyramide.

Die Seite  $\overline{BS}$  steht senkrecht auf der Grundfläche der Pyramide (siehe 3.1). Die Länge dieser Seite ist also gleichzeitig die Höhe der Pyramide.

Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck, deren Katheten damit die Höhen zueinander sind.

$$G = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot 3 = \frac{1}{6} \sqrt{8} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$h_p = \overline{SB} = \overline{BS} = |\vec{BS}| = |\vec{s} - \vec{b}| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8,49 \text{ L. E.} \quad (\text{siehe 3.1})$$

$$V_p = \frac{1}{3} G \cdot h_p = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 6\sqrt{2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \text{ V. E.}$$

**3.4** Bei einem Pyramidenstumpf sind die Grundfläche (ABC) und die Deckfläche (DEF) parallel zueinander. Zeige, dass die Punkte D und F näherungsweise die Koordinaten

$D(-0,5858 | -2 | 2,8284)$  und  $F(-0,5858 | 0,5858 | 3,4749)$  haben.

Hier gibt es mehrere Lösungswege:

1.) Strahlensatz: Der gesuchte Punkt F liegt auf der Geraden  $\vec{x} = \vec{c} + r \cdot \vec{CS}$

Um mit dieser Geradengleichung den Punkt F zu beschreiben, benötigt man den Wert für r. Weil  $\overline{BC}$  und  $\overline{DE}$  parallel zueinander sind, bilden sie mit  $\overline{BS}$  und  $\overline{CS}$  eine Strahlensatzfigur.

Nach dem Strahlensatz gilt hier:  $r = \frac{\overline{CF}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BS}} = \frac{3}{\sqrt{72}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,3536$

$$\vec{CS} = -\vec{SC} = -\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (\text{siehe 3.1})$$

$$\text{Also } \vec{f} = \vec{c} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \vec{CS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 4 \\ 2 - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 4 \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,5858 \\ 0,5858 \\ 3,4749 \end{pmatrix} \text{ q.e.d.}$$

Analog funktioniert dies mit dem Punkt D, der auf der Geraden  $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{AS}$  liegt.

$$\vec{AS} = -\vec{SA} = -\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (\text{siehe 3.1})$$

$$\text{Also } \vec{d} = \vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \vec{AS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{2} \\ -2 + 0 \\ 0 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,5858 \\ -2 \\ 2,8284 \end{pmatrix} \quad \text{q.e.d.}$$

2.) Geraden schneiden: Der Punkt F ist der Schnittpunkt der Geraden durch C und S und der Geraden, die durch E geht und einen Richtungsvektor parallel zum Vektor  $\vec{BC}$  hat.

$$g_1: \vec{x} = \vec{c} + s \cdot \vec{CS} ; \quad g_2: \vec{x} = \vec{e} + t \cdot \vec{BC} \quad \text{Gleichsetzen, Schnittpunkt F berechnen, gleiches für D.}$$

**Aufgabe 4:** Gegeben sind die folgenden Geraden und Ebenen:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_2: 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$$

**4.1** Wandle die Ebene  $E_1$  in die Koordinatenform um.

$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$I. \quad x_1 = 2 + 6r - s \quad   \quad 2I. + III$ $II. \quad x_2 = 3 + 4r$ $III. \quad x_3 = -4r + 2s$	$Ia. \quad 2x_1 + x_3 = 4 + 8r$ $II. \quad x_2 = 3 + 4r \quad   \quad 2II. - Ia.$  $-2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**4.2** Wandle die Ebene  $E_1$  in die Hesse'sche Normalenform um.

Normalenvektor ablesen:  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  Daraus Normaleneinheitsvektor:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = 0$$

**4.3** Wandle die Ebene  $E_2$  in die Normalenform um.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Finde Punkt auf Ebene: Aus } x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \text{ folgt } 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3x_3 = 5 \Leftrightarrow x_3 = \frac{5}{3}$$

$$\text{Also } \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$



**4.4** Untersuche, ob die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  parallel oder windschief oder identisch sind oder sich schneiden. Berechne ggf. den Schnittpunkt.

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nicht parallel, weil die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sind. Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2s \\ 3s \\ 4s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$I. \quad 2s - 4t = 4$$

$$II. \quad 3s = 8 \Leftrightarrow s = \frac{8}{3} \quad \text{Setze } s = \frac{8}{3} \text{ in I. und II. ein:}$$

$$III. \quad 4s - 2t = 12$$

$$I. \quad \frac{16}{3} - 4t = 4 \Leftrightarrow -4t = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$II. \quad \frac{32}{3} - 2t = 12 \Leftrightarrow -2t = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}$$

Es gibt keine Lösung für das LGS, also sind die Geraden **windschief**.

**4.5** Berechne den Winkel zwischen den Geraden  $g_1$  und  $g_2$ .

Der Winkel zwischen zwei Geraden ist gleich dem Winkel zwischen den Richtungsvektoren.

$$\cos \phi = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{8 + 8}{\sqrt{29} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{16}{2\sqrt{145}} = \frac{8}{\sqrt{145}} \approx 0,6644 \Rightarrow \phi = 0,8442 = \mathbf{48,37^\circ}$$

4.6 Untersuche, ob die Geraden  $g_1$  und die Ebene  $E_1$  sich schneiden. Berechne ggf. die Schnittgerade.

Gerade und Ebene gleichsetzen: 
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6r \\ -4r \\ 4r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ -2s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<p><i>I.</i> <math>-6r + s + 2t = 1 \quad   \quad 2I + III</math></p> <p><i>II.</i> <math>-4r + 3t = 1</math></p> <p><i>III.</i> <math>4r - 2s + 4t = 1</math></p> <p><i>Ia.</i> <math>-8r + 8t = 3</math></p> <p><i>II.</i> <math>-4r + 3t = 1 \quad   \quad 2II. + Ia.</math></p>	<p><i>IIa.</i> <math>14t = 7 \Leftrightarrow t = 0,5</math> Setze <math>t</math> in <i>II</i> ein:</p> <p><i>II.</i> <math>-4r + 3 \cdot 0,5 = 1 \Leftrightarrow -4r = -0,5 \Leftrightarrow r = \frac{1}{8}</math></p> <p>Setze <math>t = 0,5</math> und <math>r = 0,125</math> in <i>I.</i> ein:</p> <p><i>I.</i> <math>-\frac{6}{8} + s + \frac{2}{2} = 1 \Leftrightarrow s = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}</math></p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Setze  $t = \frac{1}{2}$  in  $g_1$  ein: 
$$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3,5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Also } S(2|3,4|1)$$