Mathematik LK 12 M1, 2. Kursarbeit – Integrationsmethoden – Lösung 09.12.2016

<u>Aufgabe 1:</u> Berechne die folgenden Integrale.

<u>1.1</u> $\int \frac{2x+1}{x^2-4x+4}\,dx$ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung.

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+4}=\frac{2x+1}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)}{(x-2)^2}+\frac{B}{(x-2)^2}$$

Betrachte Zähler:

$$2x+1=A(x-2)+B$$

Setze $x=2$ ein: $4+1=B \Leftrightarrow B=5$

Setze $x=3$ ein: $6+1=A\cdot(3-2)+5 \Leftrightarrow A=2$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4x+4}\,dx=\int \frac{2}{x-2}+\frac{5}{(x-2)^2}\,dx=\int \frac{2}{x-2}+\int \frac{5}{(x-2)^2}\,dx=\mathbf{2\cdot\ln(x-2)-\frac{5}{(x-2)}+C}$$

<u>1.2</u> $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(x)\cos(x)\,dx$ mit Hilfe der partiellen Integration.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(x)\cos(x)\,dx=[\sin(x)\cdot\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x)\cdot\sin(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(x)\cos(x)\,dx=[\sin^2(x)]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(x)\cos(x)\,dx=\frac{1}{2}[\sin^2(x)]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2(0)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-0^2\right)=\mathbf{\frac{1}{8}}$$

<u>1.3</u> $\int \tan(x)\,dx$ mit Hilfe einer Substitution.

Mit $z=\cos(x)$ folgt $\frac{dz}{dx}=-\sin(x) \Leftrightarrow dx=-\frac{1}{\sin(x)}dz$

$$\int \tan(x)\,dx=\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx=\int \frac{\sin(x)}{z}\cdot\left(-\frac{1}{\sin(x)}\right)dz=-\int \frac{1}{z}\,dz=-\ln(z)+C=\mathbf{-\ln(\cos(x))+C}$$

<u>Aufgabe 2:</u> Berechne die folgenden Integrale mit einer Integrationsmethode deiner Wahl.

<u>2.1</u> $\int x\cos(x)\,dx$

Partielle Integration: $\int x\cos(x)\,dx=x\sin(x)-\int 1\cdot\sin(x)\,dx=\mathbf{x\sin(x)+\cos(x)+C}$

2.2 $\int \frac{x+1}{x^2-1}dx=\int \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}dx=\int \frac{1}{x-1}dx=\mathbf{\ln(x-1)+C}$

2.3 $\int \ln(e^{x^2-4})dx=\int (x^2-4)dx=\mathbf{\frac{x^3}{3}-4x+C}$

2.4 $\int \ln(x)dx$ Hinweis: Bitte vollständigen Rechenweg aufschreiben. Es genügt nicht, die aus dem Unterricht bekannte Stammfunktion anzugeben.

$$\int \ln(x)dx=\int (\ln(x)\cdot 1)dx=\ln(x)\cdot x+C_1-\int \frac{1}{x}\cdot x\,dx=\mathbf{x\ln(x)-x+C}=x(\ln(x)-1)+C$$

2.5 $\int\limits_{-4}^{-2}(2t+\sin(\ln(x^2+1)))dt$

Da über t integriert wird, wird $\sin(\ln(x^2+1))$ beim Integrieren als Konstante behandelt:

$$\int\limits_{-4}^{-2}(2t+\sin(\ln(x^2+1)))dt=[t^2+\sin(\ln(x^2+1))t]_{-4}^{-2}=16-4\sin(\ln(x^2+1))-(4-2\sin(\ln(x^2+1)))$$
$$=\mathbf{12-2\sin(\ln(x^2+1))}$$

2.6 $\int \frac{2x-1}{x^3+3x^2-4}dx$

Partialbruchzerlegung. Faktorisiere zuerst den Nenner. Erste NST: $x_1=1$ durch Probieren.

$$\begin{array}{l} (x^3+3x^2 \quad -4):(x-1)=x^2+4x+4=(x+2)^2 \Rightarrow x_2=-2 \text{ doppelte NST.} \\ -(x^3-x^2) \\ \quad 4x^2 \quad -4 \\ \quad -(4x^2-4x) \\ \qquad 4x-4 \\ \qquad -(4x-4) \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\frac{2x-1}{x^3+3x^2-4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{A(x+2)^2}{(x-1)(x+2)^2}+\frac{B(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)^2}+\frac{C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}$$

Betrachte Zähler: $2x-1=A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1)$

Setze $x=-2$ ein: $2\cdot(-2)-1=C\cdot(-2-1) \Leftrightarrow -5=-3C \Leftrightarrow C=\frac{5}{3}$

Setze $x=1$ ein: $2\cdot 1-1=A\cdot(1+2)^2 \Leftrightarrow 1=9A \Leftrightarrow A=\frac{1}{9}$

Setze $x=2$ ein: $3=\frac{1}{9}\cdot 16+B\cdot 1\cdot 4+\frac{5}{3}\cdot 1 \Leftrightarrow 3=4B+\frac{31}{9} \Leftrightarrow -\frac{4}{9}=4B \Leftrightarrow B=-\frac{1}{9}$

Also

$$\int \frac{2x-1}{x^3+3x^2-4}dx=\int \frac{1}{9(x-1)}dx-\int \frac{1}{9(x+2)}dx+\int \frac{5}{3(x+2)^2}dx=\mathbf{\frac{\ln(x-1)}{9}-\frac{\ln(x+2)}{9}-\frac{5}{3(x+2)}+C}$$

<u>2.7</u> $\int \frac{x^3+3x^2-4}{2x-1}\,dx$ Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3+\quad 3x^2 \qquad\qquad -4):(2x-1)=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{7}{8}-\frac{25}{8\cdot(2x-1)}\\
-\underline{(x^3-0{,}5x^2)}\\
\qquad 3{,}5x^2\\
\quad -\underline{(3{,}5x^2-1{,}75x)}\\
\qquad\qquad 1{,}75x-4\\
\qquad\quad -\underline{(1{,}75x-0{,}875)}\\
\qquad\qquad\quad -\frac{25}{8}
\end{array}
$$

$$\int \frac{x^3+3x^2-4}{2x-1}\,dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{7}{8}-\frac{25}{8\cdot(2x-1)}\right)dx=\mathbf{\frac{1}{6}x^3+\frac{7}{8}x^2+\frac{7}{8}x-\frac{25}{16}\ln(2x-1)}$$

<u>2.8</u> $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$ Substitution: $z=e^x \Leftrightarrow x=\ln(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx}=e^x \Leftrightarrow dx=\frac{dz}{e^x}$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+e^x}\,dx=\int\frac{1}{1+z}\frac{dz}{e^x}=\int\frac{1}{1+z}\frac{dz}{e^{\ln(z)}}=\int\frac{1}{z(1+z)}\,dz$$

Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{z(1+z)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{1+z}=\frac{A(1+z)}{z(1+z)}+\frac{Bz}{z(1+z)}$

Vergleiche Zähler: $1=A(1+z)+Bz$

Setze $z=-1 \Rightarrow 1=A(1+(-1))+B\cdot(-1) \Leftrightarrow 1=-B \Leftrightarrow B=-1$

Setze $z=0 \Rightarrow 1=A(1+0)+B\cdot 0 \Leftrightarrow 1=A$

Also $\int\frac{1}{z(1+z)}\,dz=\int\frac{1}{z}-\frac{1}{1+z}\,dz=\int\frac{1}{z}\,dz-\int\frac{1}{1+z}\,dz=\ln(z)+C_1-\ln(1+z)-C_2$

$$=\ln(z)-\ln(1+z)+C=\ln(e^x)-\ln(1+e^x)+C=x-\ln(1+e^x)+C \quad \left(=\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)+C\right)$$

$$\int_0^1\frac{1}{1+e^x}\,dx=\left[\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\right]_0^1=\ln\left(\frac{e}{1+e}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\approx\mathbf{0{,}3799}$$

2.9 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx$

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \sin(x)\cdot\sin(x)\,dx = \sin(x)(-\cos(x)) + C_1 - \int (-\cos(x)(-\cos(x)))\,dx$$
$$\Leftrightarrow \int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + C_1 - \int \cos^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x) + C_1 - \int 1-\sin^2(x)\,dx$$
$$\Leftrightarrow \int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + C_1 - \int 1\,dx + \int \sin^2(x)\,dx \quad | \ + \int \sin^2(x)\,dx$$
$$\Leftrightarrow 2\int \sin^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x) + C_1 - x + C_2 \quad | \ :2$$
$$\Leftrightarrow \int \sin^2(x)\,dx = -\frac{1}{2}(\cos(x)\sin(x) - x) + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx = -\frac{1}{2}\cdot[\sin(x)\cos(x) - x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) - 0 = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

2.10 $\int 2e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}-1)\,dx$

Substituiere $z = \sqrt{x} \ \Rightarrow \ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \Leftrightarrow \ dx = 2\sqrt{x}\,dz = 2z\,dz$

$$\int 2e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}-1)\,dx = \int 2e^z(z-1)2z\,dz = \int 4ze^z(z-1)\,dz = 4\int z^2e^z - ze^z\,dz = 4\int z^2e^z\,dz - 4\int ze^z\,dz$$

Berechne

$$\int z^2e^z\,dz = z^2e^z + C_1 - \int 2ze^z\,dz = z^2e^z - 2\left(ze^z - \int e^z\,dz\right) + C_2 = z^2e^z - 2ze^z + 2e^z + C_3 = (z^2 - 2z + 2)e^z + C_3$$

$$\int ze^z\,dz = ze^z + C_4 - \int e^z\,dz = ze^z - e^z + C_4 = (z-1)e^z + C_4$$

Also

$$4\int z^2e^z\,dz - 4\int ze^z\,dz = 4\cdot(z^2 - 2z + 2)e^z - 4(z-1)e^z + C = 4\cdot\left(z^2 - 2z + 2 - z + 1\right)e^z + C = 4\cdot\left(z^2 - 3z + 3\right)e^z + C$$

Rücksubstitution:

$$\int 2e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}-1)\,dx = 4\cdot\left((\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + 3\right)e^{\sqrt{x}} + C = \boldsymbol{4\cdot\left(x - 3\sqrt{x} + 3\right)e^{\sqrt{x}} + C}$$

Aufgabe 3: Wir betrachten den Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{x^2-1}{(x-2)^2}$.

3.1 Berechne die Nullstellen der Funktion.

Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners sind:

NST Zähler: $x_n^2 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ x_n^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ x_{1/2} = \pm 1$

NST Nenner: $x_3 = 2$ doppelte Nullstellen

Also Nullstellen $\boldsymbol{x_1 = -1 \ ; \ x_2 = 1}$

__3.2__ Begründe, warum die Funktion zwischen den Nullstellen eine Extremstelle haben muss.

Die Funktion ist an jeder Stelle außer den Polstellen stetig. Die Polstelle liegt bei $x_3=2,$ *also außerhalb des Intervalls [-1;1]. Weil die Funktion stetig ist, muss es zwsichen zwei gleichen Funktionswerten (hier 0) eine Extremstelle geben.*

__3.3__ Berechne die Koordinaten der Extrempunkte der Funktion.

Notwendige Bedingung für Extremstellen: Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion.

$$f'(x)=-\left(\frac{2x\cdot(x-2)^2-(x^2-1)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}\right)=-\left(\frac{2x\cdot(x-2)-2(x^2-1)}{(x-2)^3}\right)=-\left(\frac{2x^2-4x-2x^2+2}{(x-2)^3}\right)$$
$$f'(x)=-\left(\frac{-4x+2}{(x-2)^3}\right)=\frac{4x-2}{(x-2)^3}$$

NST Zähler: $0=4x_4-2 \Leftrightarrow 2=4x_4 \Leftrightarrow x_4=\frac{1}{2}$ NST Nenner: $x_3=2$

Hinreichende Bedingung: $f''(x_n)\neq 0$ oder Vorzeichenwechselkriterium.

VZWK: $f'(0)=\frac{4\cdot 0-2}{(0-2)^3}>0$ $f'(1)=\frac{4\cdot 1-2}{(1-2)^3}<0$ VZW von + nach -, also Maximum bei $x_4=\frac{1}{2}$.

y-Koordinate Maximum: $f(x_4)=f(0{,}5)=-\frac{0{,}5^2-1}{(0{,}5-2)^2}=-\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

A: Das Maximum liegt im Punkt $\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{3}\right)$.

__3.4__ Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die zwischen dem Graphen von *f* und der *x*-Achse eingeschlossen ist.

Die eingeschlossene Fläche muss zwischen den beiden Nullstellen liegen.

Die gesuchte Fläche berechnet sich also mit $A=\left|\int_{-1}^{1}-\frac{x^2-1}{(x-2)^2}dx\right|$

Suche Stammfunktion: $\int -\frac{x^2-1}{(x-2)^2}dx$

Zählergrad = Nennergrad, deshalb Polynomdivision vor der Partialbruchzerlegung.

$$\begin{array}{l}(x^2 \quad\quad -1):(x^2-4x+4)=1+\dfrac{4x-5}{(x-2)^2}\\ -\underline{(x^2-4x+4)}\\ \quad\quad 4x-5\end{array}$$

$$\int -\frac{x^2-1}{(x-2)^2}dx=-\int 1+\frac{4x-5}{(x-2)^2}dx=-\int 1dx-\int \frac{4x-5}{(x-2)^2}dx$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4x-5}{(x-2)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)}{(x-2)^2}+\frac{B}{(x-2)^2}$$

Vergleiche Zähler: $4x-5=A(x-2)+B$

Setze $x=2$ ein: $4\cdot 2-5=B \Leftrightarrow B=3$

Setze $x=3$ ein: $4\cdot 3-5=A\cdot(3-2)+3 \Leftrightarrow 7=A+3 \Leftrightarrow A=4$

Also $\int -\frac{x^2-1}{(x-2)^2}dx=-\int 1dx-\int\frac{4}{(x-2)}dx-\int\frac{3}{(x-2)^2}dx=-x-4\cdot\ln(x-2)+\frac{3}{(x-2)}+C$

$$A=\left|\int_{-1}^{1}-\frac{x^2-1}{(x-2)^2}dx\right|=\left|\left[-x-4\cdot\ln(x-2)+\frac{3}{(x-2)}\right]_{-1}^{1}\right|=-1-4\ln(1-2)+\frac{3}{1-2}-\left(1-4\ln(-1-2)+\frac{3}{-3}\right)$$

Wegen ln(-1) und ln(-3) lässt sich der Flächeninhalt ohne Benutzung komplexer Zahlen leider nicht berechnen. Die Aufgabe ist an dieser Stelle gelöst.

(Der tatsächliche Flächeninhalt beträgt 0,39 F.E.)

<u>**Aufgabe 4:**</u> Der Graph der Ableitungsfunktion von $f(x)=\frac{x^3-2x^2+3x-4}{x-4}$ und die Senkrechten $x_0=-1$ und $x_1=1$ sowie die x-Achse schließen eine Fläche ein. Berechne den Flächeninhalt dieser Fläche. (Hinweis: Die Fläche liegt komplett unterhalb der x-Achse. Diese Information darf benutzt werden).

Weil die Fläche komplett unterhalb der x-Achse liegt, müssen die Nullstellen der Ableitungsfunktion nicht berechnet werden und es gilt:

$$\boldsymbol{A}=\left|\int_{-1}^{1}f'(x)dx\right|=\left|[f(x)]_{-1}^{1}\right|=|f(1)-f(-1)|=\left|\frac{1^3-2\cdot 1^2+3\cdot 1-4}{1-4}-\left(\frac{(-1)^3-2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)-4}{-1-4}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{2}{3}-2\right|=\mathbf{\frac{4}{3}}$$