Mathematik LK 11 M2, 3. KA – Differentialrechnung – Lösung **19.05.2017**

Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion $f(x)=ax^2+bx+c,\ \ a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$

Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung gemäß der Liste aus dem Unterricht durch.

Keine Skizze erforderlich! (Funktionenschar hat unendlich viele Graphen).

0. Ableitungen bilden

$f'(x)=2ax+b\ \ ;\ \ f''(x)=2a\ \ ;\ \ (f'''(x)=0)$

2. Schnittpunkte mit Koordinatenachsen

Schnittpunkt y-Achse: $f(0)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=c$ $\quad \boldsymbol{S_Y(0|c)}$

Schnittpunkt x-Achse: $0=a\cdot x_n^2+b\cdot x_n+c\ \ |\ :a\ \ \Leftrightarrow\ \ 0=x_n^2+\frac{b}{a}x_n+\frac{c}{a}$ p-q-Formel anwenden:

$$x_{1/2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(Das ist übrigens die sogenannte Mitternachtsformel); Ergebnis:

- *f* hat **keine** Nullstellen, wenn $b^2<4ac$
- *f* hat **eine** Nullstelle, wenn $b^2=4ac$. Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist $\boldsymbol{S_X\left(-\frac{b}{2a}\middle|0\right)}$
- *f* hat **zwei** Nullstellen, wenn $b^2>4ac$.

  Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind $\boldsymbol{S_{X_{1/2}}\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\middle|0\right)}$

2./3. Definitionsbereich / Polstellen / Asymptoten

$\boldsymbol{D=\mathbb{R}}$, keine Polstellen, keine senkrechten, schiefen, waagerechten Asymptoten

4./5. Grenzwertverhalten

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, wenn $a>0$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$, wenn $a<0$

6. Achsensymmetrie zur y-Achse / Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung

$f(x)=ax^2+bx+c=a(-x)^2-b(-x)+c\neq -f(-x)\ \ \forall\, x, a\neq 0, b, c\in\mathbb{R}$ Also nicht punktsymmetrisch

Für $b=0$ gilt: $f(x)=ax^2+c=a(-x)^2+c=f(-x)$

A: Für $\boldsymbol{b=0}$ ist f achsensymmetrisch zur y-Achse

<u>7. Extrempunkte</u>

Klassisch: Notwendige Bedingung: Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion $f'(x)=2ax+b$.

$$0=2ax_E+b \quad |-b \;\Leftrightarrow\; -b=2ax_E \quad |:2a \;\Leftrightarrow\; -\frac{b}{2a}=x_E$$

Hinreichende Bedingung: $f''(x_E)\neq 0$

$f''\left(-\frac{b}{2a}\right)=2a\neq 0$, weil $a\neq 0$

$f''\left(-\frac{b}{2a}\right)=2a<0$ für $a<0\Rightarrow$ Maximum

$f''\left(-\frac{b}{2a}\right)=2a>0$ für $a>0\Rightarrow$ Minimum

y-Koordinate: $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{ab^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{2b^2}{4a}+c=c-\frac{b^2}{4a}$

A: *f* hat ein Extremum im Punkt $\left(-\frac{b}{2a}\middle| c-\frac{b^2}{4a}\right)$. Für a<0 ist es ein Maximum. Für a>0 ist es ein Minimum.

Alternativ: Umwandeln in Scheitelpunktsform

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c=a\left[\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c=a\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

A: *f* hat ein Extremum im Punkt $\left(-\frac{b}{2a}\middle| c-\frac{b^2}{4a}\right)$. Für a<0 ist es ein Maximum. Für a>0 ist es ein Minimum.

<u>8./9. Wendepunkte / Wendetangenten</u>

Notwendige Bedingung: Nullstellen der zweiten Ableitungsfunktion $f'(x)=2a$.

$0=2a \;\Rightarrow$ Es gibt kein x, dass die Gleichung erfüllt, also **keine Wendestellen**.

<u>10. Skizze</u>

nicht erforderlich laut Aufgabenstellung

Mathematik LK 11 M2, 3. KA – Differentialrechnung – Lösung **19.05.2017**

<u>Aufgabe 2:</u> Gegeben ist die Funktion $f(x)=(x-1)^5-2\cdot(x-1)^3+1$

Untersuche die Funktion auf allgemeine Punktsymmetrie.

Eine Funktion ist punktsymmetrisch zum Punkt $(a|b)$, wenn gilt: $f(x)=2b-f(2a-x)$

Vermutung: *f* ist punktsymmetrisch zum Punkt $(1|1)$. Test:

$$f(x)=2\cdot1-f(2\cdot1-x)=2-f(2-x)=2-\left[((2-x)-1)^5-2\cdot((2-x)-1)^3+1\right]$$
$$=2-(1-x)^5+2\cdot(1-x)^3-1=1-(1-x)^5+2\cdot(1-x)^3=1-(-(x-1))^5+2\cdot(-(x-1))^3$$
$$=1+(x-1)^5-2\cdot(x-1)^3=(x-1)^5-2\cdot(x-1)^3+1 \quad \text{q.e.d.}$$

<u>Aufgabe 3:</u> Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\pi}\frac{\sin^2(t)}{(t-\pi)^2}$

Zähler: $\lim\limits_{t\to\pi}\sin^2(t)=\sin^2(\pi)=0^2=0$ Nenner: $\lim\limits_{t\to\pi}(t-\pi)^2=(\pi-\pi)^2=0^2=0$

Ableitungen: $\frac{d}{dt}\sin^2(t)=2\cos(t)\sin(t)$; $\frac{d}{dt}(t-\pi)^2=2(t-\pi)$

Also $\lim\limits_{t\to\pi}\frac{\sin^2(t)}{(t-\pi)^2}=\lim\limits_{t\to\pi}\frac{2\cos(t)\sin(t)}{2(t-\pi)}$

Zähler: $\lim\limits_{t\to\pi}2\cos(t)\sin(t)=2\cdot-1\cdot0=0$ Nenner: $\lim\limits_{t\to\pi}2(t-\pi)=2(\pi-\pi)=0$

Ableitungen: $\frac{d}{dt}2\cos(t)\sin(t)=2[(-sint(t))\sin(t)+\cos(t)\cos(t)]=2(\cos^2(t)-\sin^2(t))$

$\frac{d}{dt}2(t-\pi)=2\cdot1=2$ Also

$$\boldsymbol{\lim\limits_{t\to\pi}\frac{\sin^2(t)}{(t-\pi)^2}}=\lim\limits_{t\to\pi}\frac{2\cos(t)\sin(t)}{2(t-\pi)}=\lim\limits_{t\to\pi}\frac{2(\cos^2(t)-\sin^2(t))}{2}=\cos^2(\pi)-\sin^2(\pi)=(-1)^2-0^2=\mathbf{1}$$

<u>Aufgabe 4:</u> Eine Dose mit einem Liter Fassungsvermögen soll hergestellt werden. Dabei werden Grund- und Deckkreis aus dem umschriebenen Quadrat ausgeschnitten.

Berechne die zu wählenden Maße der Dose so, dass der Materialverbrauch minimal ist.

Zielfunktion zunächst: $O(r,h)=2\cdot(2r)^2+2\pi r\cdot h$

Nebenbedingung: $V=1l=G\cdot h=\pi r^2\cdot h$ Also $\pi r^2 h=1 \Leftrightarrow h=\frac{1}{\pi r^2}$ Einsetzen:

$$O(r,h)=2\cdot(2r)^2+2\pi r\cdot h=8r^2+2\pi r\cdot\frac{1}{\pi r^2}=8r^2+\frac{2}{r}=O(r)$$

Suche Minimum. Notwendige Bedingung: NST der ersten Ableitung: $O'(r)=16r-\frac{2}{r^2}$

$$0=16r_E-\frac{2}{r_E^2} \Leftrightarrow \frac{2}{r_E^2}=16r_E \quad |\cdot r_E^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2=16r_E^3 \Leftrightarrow 8=r_E^3 \quad |^{\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad 2=r_E$$

Hinreichende Bedingung: $O''(r_E)\neq 0 \qquad O''(r)=16+\frac{4}{r^3}$

$O''(r_E)=O''(2)=16+\frac{4}{8}>0$ Also ist $r_E=2$ das gesuchte Minimum.

$$h_E=\frac{1}{\pi r^2}=\frac{1}{\pi\cdot 2}=\frac{1}{2\pi}\approx 0{,}16$$

A: Für minimalen Verbrauch bei einer Dose mit dem Volumen *1 l* wählt man $r_E=2\,dm$ als Radius und $h_E=(2\pi)^{-1}\approx 0{,}16\,dm$ als Höhe.

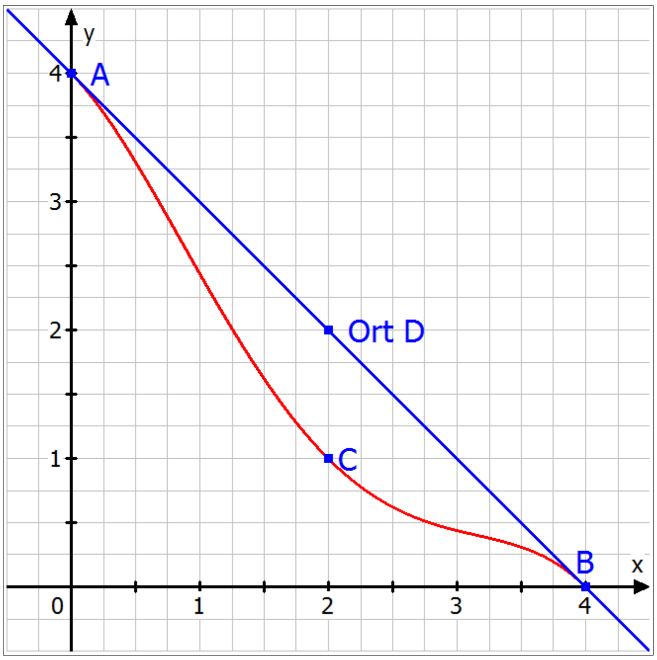
__Aufgabe 5:__ Die Zuversicht eines Schülers im Verlauf einer Kursarbeit lässt sich mit der Funktion $f(t)=e^{-2t}$ beschreiben (*t* in Stunden).

Berechne die Zuversicht-Halbwertszeit.

Der Startwert ist $b=1$. Der Punkt $\left(t_H\middle|\frac{1}{2}\right)$ liegt auf dem Graphen der Funktion. Einsetzen:

$$\frac{1}{2}=e^{-2t_H} \quad | \ \ln() \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0{,}5)=-2t_H \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\ln(0{,}5)}{2}=t_H \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{t_H\approx 0.3466}$$

A: Nach jeweils etwa 21 min halbiert sich die Zuversicht des Schülers.



__Aufgabe 6:__
Eine Umgehungsstraße soll um den Ort D gebaut werden. Die alte Straße ist schnurgerade und läuft durch *D*. An den Punkten $A(0|4)$ und $B(4|0)$ soll die neue Straße tangential an die alte Straße anschließen. Außerdem soll die neue Straße durch den Punkt $C(2|1)$ gehen.

(1 L.E. entspricht 1 km)

Bestimme eine ganzrationale Funktion 4. Grades, die den Verlauf der Umgehungsstraße beschreibt.

Mathematik LK 11 M2, 3. KA – Differentialrechnung – Lösung 19.05.2017

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$; $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

Die neue Straße soll durch die Punkte A, B und C gehen. Also $f(0)=4, f(4)=0$ und $f(2)=1$.
Die alte Straße läuft durch die Punkte $A(0|4)$ und $B(4|0)$. Damit hat die zugehörige Gerade die Steigung $m=\frac{4-0}{0-4}=-1$. Für den tangentialen Anschluss muss für die Funktion deshalb gelten:
$f'(0)=-1$ und $f'(4)=-1$

Also

$$
\begin{array}{ll}
I. & a\cdot 0^4+b\cdot 0^3+c\cdot 0^2+d\cdot 0+e=4 \Leftrightarrow e=4 \\
II. & a\cdot 4^4+b\cdot 4^3+c\cdot 4^2+d\cdot 4+e=0 \Leftrightarrow 256a+64b+16c+4d+e=0 \\
III. & a\cdot 2^4+b\cdot 2^3+c\cdot 2^2+d\cdot 2+e=1 \Leftrightarrow 16a+8b+4c+2d+e=1 \\
IV. & 4a\cdot 0^3+3b\cdot 0^2+2c\cdot 0+d=-1 \Leftrightarrow d=-1 \\
V. & 4a\cdot 4^3+3b\cdot 4^2+2c\cdot 4+d=-1 \Leftrightarrow 256a+48b+8c+d=-1
\end{array}
$$

Setze $e=4$ und $d=-1$ in die übrigen Gleichungen ein:

$$
\begin{array}{ll}
II. & 256a+64b+16c+4\cdot(-1)+4=0 \Leftrightarrow 256a+64b+16c=0 \quad | \; II.-4III. \\
III. & 16a+8b+4c+2\cdot(-1)+4=1 \Leftrightarrow 16a+8b+4c=-1 \\
V. & 256a+48b+8c-1=-1 \Leftrightarrow 256a+48b+8c=0 \quad | \; V.-2III.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
IIa. & 192a+32b=4 \\
Va. & 224a+32b=2 \quad | \; Va.-IIa.
\end{array}
$$

$32a=-2 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{16}$ Setze $a=-\frac{1}{16}$ in IIa. ein:

$$192\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)+32b=4 \Leftrightarrow -12+32b=4 \Leftrightarrow 32b=16 \Leftrightarrow b=\frac{1}{2}$$

Setze: $a=-\frac{1}{16}$ und $b=\frac{1}{2}$ in III. ein:

$$16\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)+\frac{8\cdot 1}{2}+4c=-1 \Leftrightarrow -1+4+4c=-4 \Leftrightarrow 4c=-4 \Leftrightarrow c=-1$$

Damit ist $\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}x^3-x^2-x+4}$

A: Der Architekt sollte die Straße nach der Funktion $\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-x+4}$ bauen.