Mathematik LK 11 M2, 2. KA – gebr. rat. Funkt. / Diff.-rechnung – Lösung 06.03.2017

__Aufgabe 1:__ Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{-2x^2-x^3+x^4}{x^5+x^4}$

Bestimme jeweils...

__1.1__ ...alle Nullstellen von *f*.

Nullstellen von f: Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners sind.

Nullstellen Zähler: $0=x_n^4-x_n^3-2x_n^2 \Leftrightarrow 0=x_n^2\cdot\left(x_n^2-x_n-2\right) \Rightarrow x_1=0$ doppelte NST

Betrachte Klammer: $0=x_n^2-x_n-2$ Mit p-q-Formel (oder quadratischer Ergänzung)

$$x_{2/3}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{2{,}25}=\frac{1}{2}\pm1{,}5 \Rightarrow x_2=\frac{1}{2}-1{,}5=-1 \;;\; x_3=\frac{1}{2}+1{,}5=2$$

Nullstellen Nenner: $0=x_n^5+x_n^4 \Leftrightarrow 0=x_n^4\cdot(x_n+1) \Rightarrow x_1=0$ vierfache NST, $x_2=-1$

$x_1=0$ ist keine Nullstelle der Funktion, denn x_1 ist auch eine Nullstelle des Nenners.

Gleiches gilt für $x_2=-1$.

$\boldsymbol{x_3=2}$ ist die einzige Nullstelle von *f*.

__1.2__ ...den Definitionsbereich von *f*. $\boldsymbol{D=\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}}$

__1.3__ ...die Polstellen von *f*. Gib jeweils den Grad der Polstelle an.

(Grad einer Polstelle: Wenn x_P eine n-fache Polstelle ist, ist n der Grad der Polstelle.)

$\boldsymbol{x_1=0}$ ist eine Polstelle von *f* mit dem **Grad 2**, denn x_1 ist eine 4-fache NST des Nenners und 2-fache NST des Zählers. Nach dem Kürzen mit *(x-0)* würde x_1 also als 2-fache NST des Nenners übrig bleiben.

$x_2=-1$ ist keine Polstelle, sondern eine hebbare Definitionslücke, weil x_2 sowohl einfache NST des Zählers und des Nenners ist.

__1.4__ ...das Grenzwertverhalten von *f* für $x\to\pm\infty$ und an den Polstellen.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x^3+x^4}{x^5+x^4}=0$, denn der Nennergrad ist größer als der Zählergrad.

$$\frac{-2x^2-x^3+x^4}{x^5+x^4}=\frac{x^2(x^2-x-2)}{x^4(x+1)}=\frac{(x-2)(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{x-2}{x^2} \quad \text{für} \quad x\neq0\,;x\neq-1$$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x-2}{x^2}-\infty$ Weil $x_1=0$ eine 2-fache Polstelle ist, folgt direkt $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=-\infty$

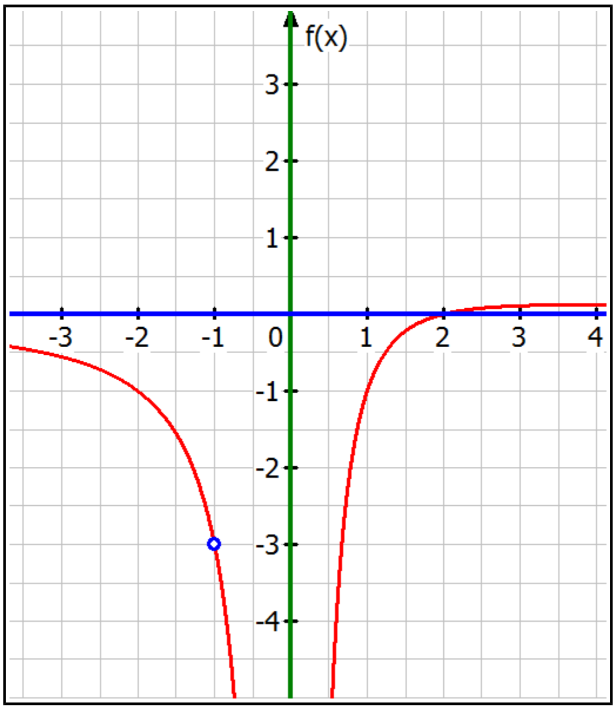
1.5 ...die Gleichungen alle waagerechten, senkrechten und/oder schiefen Asymptoten von *f* bzw. ggf. der Näherungsfunktionen höheren Grades für $x \rightarrow \pm\infty$.

Waagerechte Asymptoten: $y=0$

Senkrechte Asymptoten: $x_1=0$

Schiefe Asymptote oder Näherungsfunktionen: keine

1.6 Benutze die Ergebnisse von 1.1-1.5 und fertige eine Skizze des Graphen von *f* an. Zeichne die Asymptoten ein. Du sollst keine Wertetabelle anlegen oder Funktionswerte ausrechnen.



Aufgabe 2: Bestimme jeweilse die erste Ableitungsfunktion und vereinfache den Funktionsterm so weit wie möglich.

2.1 $f(x)=\sin(2x)\cdot(1-x)^2$

Produktregel $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ mit

$$u(x)=\sin(2x) \Rightarrow u'(x)=2\cos(2x)$$

$$v(x)=(1-x)^2 \Rightarrow v'(x)=-1\cdot 2(1-x)=2x-2$$

(Jeweils Kettenregel angewendet)

$$f'(x)=2\cos(2x)(1-x)^2+\sin(2x)(2x-2)$$

Keine weitere sinnvolle Vereinfachung.

2.2 $f(x)=\cos\left(\sqrt{3x^2-5}\right)$

Das ist die Verschachtelung von drei Funktionen. Also zweimalige Anwendung der Kettenregel:

$f(x)=u(v(x))$ mit $v(x)=\sqrt{3x^2-5}$ und $u(v(x))=\cos(v(x))$

$v(x)=u_1(v_1(x))$ mit $v_1(x)=3x^2-5 \Rightarrow v_1'(x)=6x$ und

$$u_1(v_1(x))=\sqrt{v_1(x)} \Rightarrow u_1'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{v_1(x)}}$$

Dann ist $v'(x)=v_1'(x)\cdot u_1'(v_1(x))=\dfrac{6x}{2\cdot\sqrt{3x^2-5}}=\dfrac{3x}{\sqrt{3x^2-5}}$

$$u(v(x))=\cos(v(x)) \qquad u'(v(x))=-\sin(v(x))=-\sin\left(\sqrt{3x^2-5}\right)$$

$$f'(x)=v'(x)u'(v(x))=-\frac{3x\sin\left(\sqrt{3x^2-5}\right)}{\sqrt{3x^2-5}}$$

2.3 $f(x)=\frac{x\cos(x)}{\tan^{-1}(x)}=x\cos(x)\cdot\tan(x)=x\cos(x)\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=x\cdot\sin(x)$

$\boldsymbol{f'(x)}=1\cdot\sin(x)+x\cdot\cos(x)=\boldsymbol{x\cos(x)+\sin(x)}$

2.4 $f(x)=\frac{\sin(x)}{\ln(y)}$ $\boldsymbol{f'(x)=\frac{\cos(x)}{\ln(y)}}$

2.5 $f(t)=\frac{\sqrt{x^2+3x+\cos(x)}}{\ln\left(\tan(x^2)\right)}$ $\boldsymbol{f'(t)=0}$

2.6

$$f(x)=\frac{\cos(x)\cdot[\cos(x)+\tan(x)\sin(x)]}{e^{\ln(x)}\cdot x^{-1}}=\frac{x\cdot\cos(x)\cdot\left[\cos(x)+\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\sin(x)\right]}{x}=\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$$

$\boldsymbol{f'(x)=0}$

Aufgabe 3: Bestimme die Gleichung der Tangenten und der Normalen der Funktion *f* an der Stelle x_0.

$f(x)=x^3-4x^2+5$; $x_0=2$ $\Rightarrow f'(x_0)=3x^2-8x$ $f(x_0)=f(2)=2^3-4\cdot 2^2+5=-3$

Tangentengleichung $g_T(x)=m_T x+n_T$ mit $m_T=f'(x_0)=f'(2)=3\cdot 2^2-8\cdot 2=12-16=-4$

$(2|-3)$ in Tangentengleichung einsetzen: $-3=-4\cdot 2+n_T \Leftrightarrow 5=n_T$

Also $\boldsymbol{g_T(x)=-4x+5}$

Normalengleichung: $g_N(x)=m_N x+n_N$ mit $m_N=-\frac{1}{m_T}=-\frac{1}{-4}=\frac{1}{4}$

$(2|-3)$ in Normalengleichung einsetzen: $-3=\frac{1}{4}\cdot 2+n_N \Leftrightarrow -3{,}5=n_N$

Also $\boldsymbol{g_N(x)=\frac{1}{4}x-3{,}5}$

Mathematik LK 11 M2, 2. KA – gebr. rat. Funkt. / Diff.-rechnung – Lösung 06.03.2017

<u>Aufgabe 4:</u> Sei $f_t(x)=\frac{x^2}{x-t}$, $t\in\mathbb{R}$ eine Schar gebrochen rationaler Funktionen auf $\mathbb{R}$.

(Hinweis: Die Ergebnisse der folgenden Aufgabenteile enthalten ggf. noch t als Variable).

<u>4.1</u> Zeige, dass $f_t'(x)=\frac{x^2-2tx}{(x-t)^2}$ und $f_t''(x)=\frac{2t^2}{(x-t)^3}$

$f_t(x)=\frac{x^2}{x-t}$ Anwendung Quotientenregel $f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ mit

$u(x)=x^2 \Rightarrow u'(x)=2x \;;\; v(x)=x-t \Rightarrow v'(x)=1$

$$\boldsymbol{f_t'(x)}=\frac{2x\cdot(x-t)-x^2\cdot 1}{(x-t)^2}=\frac{2x^2-2xt-x^2}{(x-t)^2}=\boldsymbol{\frac{x^2-2xt}{(x-t)^2}}$$

Zweite Ableitung: Quotientenregel mit

$u(x)=x^2-2xt \Rightarrow u'(x)=2x-2t \;;\; v(x)=(x-t)^2 \Rightarrow v'(x)=2(x-t)$

$$\boldsymbol{f_t''(x)}=\frac{(2x-2t)\cdot(x-t)^2-(x^2-2xt)\cdot 2(x-t)}{(x-t)^4}=\frac{(2x-2t)\cdot(x-t)-(x^2-2xt)\cdot 2}{(x-t)^3}$$
$$=\frac{2x^2-2xt-2xt+2t^2-2x^2+4xt}{(x-t)^3}=\boldsymbol{\frac{2t^2}{(x-t)^3}}$$

<u>4.2</u> Bestimme die Nullstellen, Definitionslücken und Polstellen von f_t.

$0=\frac{x_n^2}{x_n-t}$

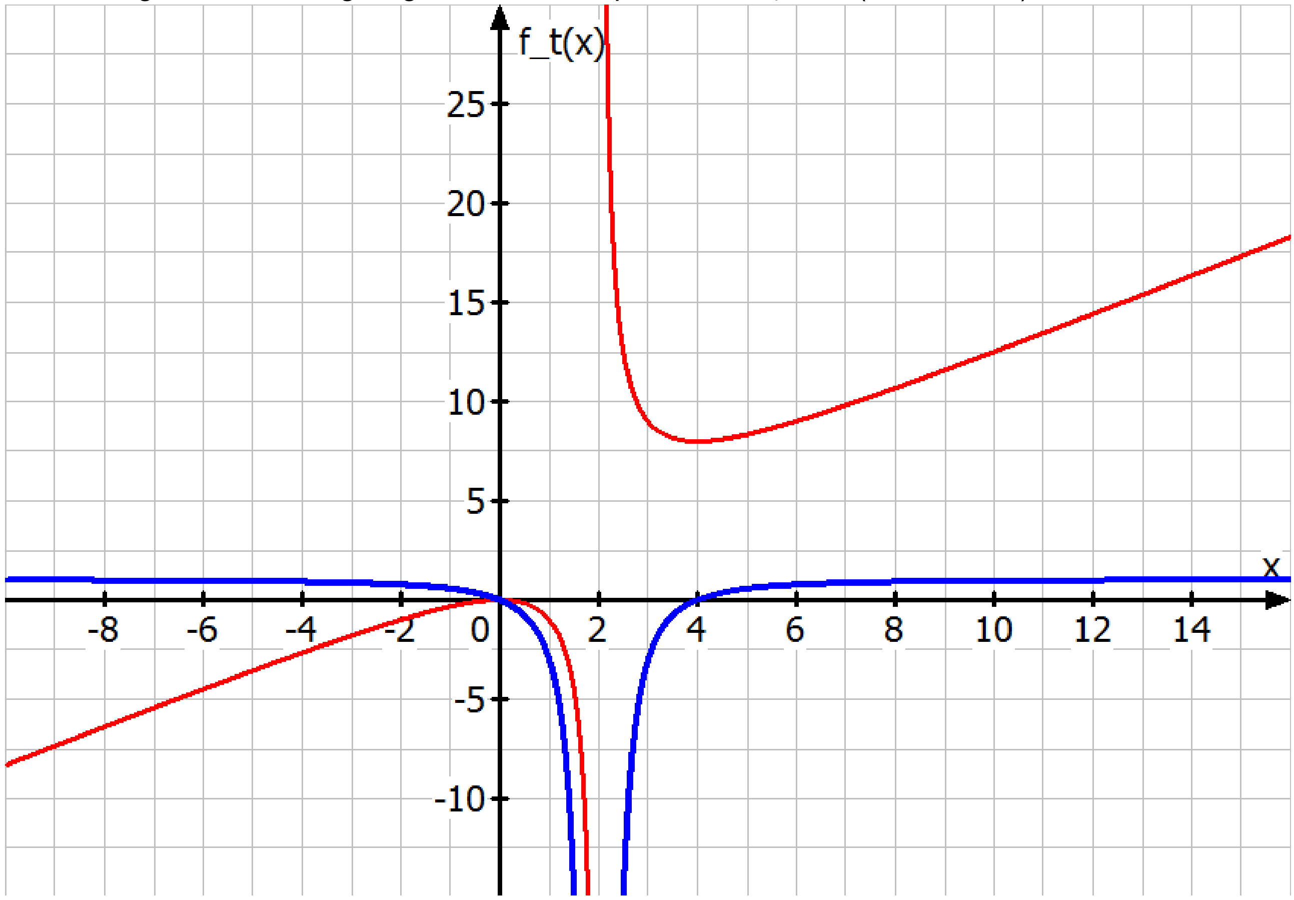
Nullstellen des Zählers: $0=x_n^2 \Leftrightarrow x_1=0$

Nullstellen des Nenners: $0=x_n-t \Leftrightarrow x_2=t$

Nullstellen der Funktion: $\boldsymbol{x_1=0}$ für $t\neq 0$

Definitionslücke und Polstelle: $\boldsymbol{x_2=t}$

4.3 Die folgende Abbildung zeigt einen der Graphen von $f_t(x)$. (t unbekannt)



Zeichne die Ableitungsfunktion von in das Koordinatensystem auf dem Aufgabenblatt.

Beschreibe in Stichpunkten, wie man eine Ableitungsfunktion graphisch bestimmt.

- Nullstellen der Ableitungsfunktion sind an den Extremstellen der Funktion.
- Extremstellen der Ableitungsfunktion sind an den Wendestellen der Funktion.
- Positive und negative Steigungen der Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$ und an den Polstellen bestimmen das Vorzeichen der Funktionswerte der Ableitungsfunktion.

4.4 Bestimme rechnerisch, welche Stellen als Extremstellen (x-Koordinaten von Hoch- oder Tiefpunkten) für f_t in Frage kommen.

Das sind die Nullstellen der Ableitungsfunktion $f_t'(x)=\frac{x^2-2tx}{(x-t)^2}$

$0=\frac{x_n^2-2tx}{(x_n-t)^2}$ Nullstellen Zähler: $0=x_n^2-2tx=x_n(x_n-2t) \Rightarrow x_1=0$ Betrachte Klammer:

$0=x_2-2t \Leftrightarrow 2t=x_2$

Nullstellen Nenner: $0=(x_n-t)^2 \Leftrightarrow 0=x_n-t \Leftrightarrow x_3=t$

Nullstellen Ableitungsfunktion und damit mögliche Extremstellen: $\mathbf{x_1=0}$ und $\mathbf{x_2=2t}$

<u>4.5</u> Erkläre, warum die berechneten Stellen aus Aufgabe 4.4 nicht zwingend Extremstellen sein müssen. Skizziere einen Beispielgraphen, bei dem mindestens eine Stellen, die man berechnen würde, keine Extremstelle ist.

Zwar jede Funktion an jeder Extremstelle die Steigung null, es gilt also:

Wenn x_E eine Extremstelle ist, dann gilt $f'(x_E)=0$.

Aber das umgekehrte gilt nicht: Wenn $f'(x_E)=0$, folgt nicht zwingend, dass x_E eine Extremstelle ist.

Die zweite Aussage kann durch ein Beispiel bewiesen werden, bei dem $f'(x_E)=0$, aber x_E keine Extremstelle ist.

Bsp: $f(x)=x^3$; $x_E=0$

$f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(x_E)=f'(0)=3 \cdot 0^2=0$

Wenn man aber den Graphen betrachtet, dann sieht man, dass x_E eine Wendestelle ist, genauer gesagt liegt hier ein Wendepunkt mit der Steigung null vor: Ein sogenannter Sattelpunkt.