Mathematik LK 11 M2, HÜ Nr. 6 – Satz von de L'Hospital – Lösung B **05.05.2017**

Aufgabe 1: Berechne die folgenden Grenzwerte:

1.1 $\lim_{x \to 0} \frac{x}{2e^x - 2}$ Zähler: $\lim_{x \to 0} x = 0$ Nenner: $\lim_{x \to 0} (2e^x - 2) = 2 \cdot e^0 - 2 = 2 - 2 = 0$

Ableitungen: $\frac{d}{dx} x = 1$; $\frac{d}{dx}(2e^x - 2) = 2e^x$ Also $\mathbf{\lim_{x \to 0} \frac{x}{2e^x - 2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2e^x} = \frac{1}{2e^0} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

1.2 $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x}$ Zähler: $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$ Nenner: $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$

Ableitungen: $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$; $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ Beides läuft wieder gegen unendlich, also

$\frac{d}{dx} 3x^2 = 6x$; $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ Beides läuft wieder gegen unendlich, also

$\frac{d}{dx} 6x = 6$; $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ Somit ist: $\mathbf{\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{e^x} = \mathbf{0}$

1.3 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x \sin(x)} - \frac{x}{x \sin(x)} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)}$

Zähler: $\lim_{x \to 0} (\sin(x) - x) = 0 - 0 = 0$ Nenner: $\lim_{x \to 0} (x \sin(x)) = 0 \cdot 0 = 0$

Ableitungen: $\frac{d}{dx}(\sin(x) - x) = \cos(x) - 1$; $\frac{d}{dx}(x \cdot \sin(x)) = 1 \cdot \sin(x) + x \cos(x)$

Zähler: $\lim_{x \to 0} (\cos(x) - 1) = 1 - 1 = 0$ Nenner: $\lim_{x \to 0} (\sin(x) + x \cos(x)) = 0 + 0 \cdot \cos(0) = 0$

Ableitungen:

$\frac{d}{dx}(\cos(x) - 1) = -\sin(x)$; $\frac{d}{dx}(\sin(x) + x \cos(x)) = \cos(x) + 1 \cdot \cos(x) - x \sin(x) = 2\cos(x) - x \sin(x)$

$\mathbf{\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{2\cos(x) - x \sin(x)} = \frac{-\sin(0)}{2\cos(0) - 0 \sin(0)} = \frac{0}{2} = \mathbf{0}$