Mathematik LK 11 M2, HÜ Nr. 6 – Satz von de L'Hospital – Lösung A **05.05.2017**

__Aufgabe 1:__ Berechne die folgenden Grenzwerte:

__1.1__ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x-2}{x}$

Zähler: $\lim\limits_{x\to 0}(2e^x-2)=2\cdot e^0-2=2-2=0$ Nenner: $\lim\limits_{x\to 0} x=0$

Ableitungen: $\frac{d}{dx}(2e^x-2)=2e^x$; $\frac{d}{dx}x=1$ Also $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x}{1}=2e^0=\mathbf{2}$

__1.2__ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}$ Zähler: $\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\infty$ Nenner: $\lim\limits_{x\to\infty} x^3=\infty$

Ableitungen: $\frac{d}{dx}e^x=e^x$; $\frac{d}{dx}x^3=3x^2$ Beides läuft wieder gegen unendlich, also

$\frac{d}{dx}e^x=e^x$; $\frac{d}{dx}3x^2=6x$ Beides läuft wieder gegen unendlich, also

$\frac{d}{dx}e^x=e^x$; $\frac{d}{dx}6x=6$ Somit ist: $\mathbf{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{6x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{6}=\boldsymbol{\infty}$

__1.3__ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\sin(x)}-\frac{\sin(x)}{x\sin(x)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}$

Zähler: $\lim\limits_{x\to 0}(x-\sin(x))=0-0=0$ Nenner: $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin(x))=0\cdot 0=0$

Ableitungen: $\frac{d}{dx}(x-\sin(x))=1-\cos(x)$; $\frac{d}{dx}(x\cdot\sin(x))=1\cdot\sin(x)+x\cos(x)$

Zähler: $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos(x))=1-1=0$ Nenner: $\lim\limits_{x\to 0}(\sin(x)+x\cos(x))=0+0\cdot\cos(0)=0$

Ableitungen:

$\frac{d}{dx}(1-\cos(x))=\sin(x)$; $\frac{d}{dx}(\sin(x)+x\cos(x))=\cos(x)+1\cdot\cos(x)-x\sin(x)=2\cos(x)-x\sin(x)$

$\mathbf{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}=\frac{\sin(0)}{2\cos(0)-0\sin(0)}=\frac{0}{2}=\mathbf{0}$