Mathematik LK 11 M2, HÜ Nr. 5 – Funktionsuntersuchung – Lösung AB 26.04.2017

Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x)=\frac{e^{tx}}{x}, t\in\mathbb{R}$

Berechne die ersten drei Ableitungsfunktionenscharen der Funktionsschar.

$$f_t(x)=\frac{e^{tx}}{x} \Rightarrow \boldsymbol{f_t'(x)}=\frac{t e^{tx}\cdot x-e^{tx}\cdot 1}{x^2}=\boldsymbol{\frac{(tx-1)e^{tx}}{x^2}}$$

Betrachte Zähler der Ableitung:

$$u_1(x)=(tx-1)e^{tx} \Rightarrow u_1'(x)=t e^{tx}(tx-1)+e^{tx}\cdot t=(t^2x-t)e^{tx}+e^{tx}\cdot t=(t^2x-t+t)e^{tx}=t^2 x e^{tx}$$

Damit $\Rightarrow \boldsymbol{f_t''(x)}=\frac{t^2 x e^{tx}\cdot x^2-(tx-1)e^{tx}\cdot 2x}{x^4}=\frac{t^2 e^{tx}\cdot x^2-(tx-1)e^{tx}\cdot 2}{x^3}$

$$=\frac{t^2x^2e^{tx}-(2tx-2)e^{tx}}{x^3}=\frac{(t^2x^2-(2tx-2))e^{tx}}{x^3}=\boldsymbol{\frac{(t^2x^2-2tx+2)e^{tx}}{x^3}}$$

Betrachte Zähler der 2. Ableitung: $u_2(x)=(t^2x^2-2tx+2)e^{tx}$

$$\Rightarrow u_2'(x)=(2t^2x-2t)e^{tx}+(t^2x^2-2tx+2)\cdot t e^{tx}=(2t^2x-2t)e^{tx}+(t^3x^2-2t^2x+2t)e^{tx}$$
$$=(2t^2x-2t+t^3x^2-2t^2x+2t)e^{tx}=t^3x^2e^{tx}$$

Damit $\Rightarrow \boldsymbol{f_t'''(x)}=\frac{t^3x^2e^{tx}x^3-(t^2x^2-2tx+2)e^{tx}\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{t^3x^2e^{tx}x-(t^2x^2-2tx+2)e^{tx}\cdot 3}{x^4}$

$$=\frac{t^3x^2e^{tx}x-(3t^2x^2-6tx+6)e^{tx}}{x^4}=\frac{(t^3x^3-(3t^2x^2-6tx+6))e^{tx}}{x^4}=\boldsymbol{\frac{(t^3x^3-3t^2x^2+6tx-6)e^{tx}}{x^4}}$$

Bestimme die Extremstellen der Funktionenschar (in Abhängigkeit von *t*).

Notwendige Bedingung: NST der ersten Ableitung

$$0=\frac{(tx_E-1)e^{tx_E}}{x_E^2} \quad | \cdot x^2 \ \ (\text{für } x\neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad 0=(tx_E-1)e^{tx_E}$$

Betrachte 1. Klammer: $0=tx_E-1 \Leftrightarrow 1=tx_E \Leftrightarrow x_E=\frac{1}{t}$

Betrachte 2. Faktor: $0=e^{tx_E}$ keine Lösung, weil $e^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Hinreichende Bedingung:

1. elegant: Weil $x_E=\frac{1}{t}$ eine einfache NST ist, handelt es sich um eine Extremstelle.

2. konventionell: $f_t''(x_E)\neq 0$

$$f_t''\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\left(t^2\left(\frac{1}{t}\right)^2-2t\left(\frac{1}{t}\right)+2\right)e^{t\left(\frac{1}{t}\right)}}{\left(\frac{1}{t}\right)^3}=(1-2+2)e^1\cdot t^3=t^3e\neq 0\ \forall t\neq 0$$

Also ist $\boldsymbol{x_E=\frac{1}{t}}$ jeweils die Extremstelle für die Funktionen der Funktionenschar, (außer für $t=0$)