

Aufgabe 1: Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a)
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 20x^2 + 2x + 10) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 \cdot \left(1 + \frac{20}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{10}{x^3} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot (1 + 0 + 0)) = -\infty$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 20x^2 + 2x + 10) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 20x^2 + 2x + 10) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 + \lim_{x \rightarrow 0} 20x^2 + \lim_{x \rightarrow 0} 2x + \lim_{x \rightarrow 0} 10 = 0^3 + 20 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 10 = 10$$

d)
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1000} x^{12} + 1000x^3 - 1000x^2 + x - 2 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^{12} \left(\frac{1}{1000} + \frac{1000}{x^9} - \frac{1000}{x^{10}} + \frac{1}{x^{11}} - \frac{2}{x^{12}} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^{12} \left(\frac{1}{1000} + 0 - 0 + 0 - 0 \right) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{12}}{1000} = \infty \end{aligned}$$

e)
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 6x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot \left(1 + \frac{6}{x} \right)}{x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{x} \right)} = \frac{1}{1} = 1$$

f)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \left(x + 6 + \frac{9}{x} \right)}{x \cdot \left(1 - \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 6 + 0}{1 - 0} = \infty$$

g)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^3 - 27} = \frac{0^2 + 6 \cdot 0 + 9}{0^3 - 27} = -\frac{1}{3}$$

h)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{12} - 6x^3 + 9}{x^{13} - 6x^{10}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{12} \cdot \left(1 - \frac{6}{x^9} + \frac{9}{x^{12}} \right)}{x^{12} \cdot \left(x - \frac{6}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 0 + 0}{x - 0} = 0$$

Aufgabe 2: Gegeben ist die rationale Funktion f. Bestimme jeweils alle Nullstellen, den Definitionsbereich und die Polstellen von f. Bestimme außerdem das Verhalten der Funktionswerte für $x \rightarrow \pm\infty$ sowie die Gleichungen aller Asymptoten von f und ggf. die Näherungsfunktion für $x \rightarrow \pm\infty$.

Hinweis: Die hier vorgestellten Lösungen sind sehr ausführlich und gehen teilweise über die Aufgabenstellung hinaus. Es ist nicht immer erforderlich, alle diese Schritte durchzuführen.

a)
$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

Nullstellen Zähler: $x_1 = -1$	Nullstellen Nenner: $x_2 = -2$
--------------------------------	--------------------------------

Grenzwerte:
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$$

Hinweis: Das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ erhält man auch über die Polynomdivision:

$$(x+1):(x+2) = 1 - \frac{1}{x+2}$$

Der Restterm geht gegen null für $x \rightarrow \pm\infty$, die Funktion $f(x)$ nähert sich der konstanten Funktion $g(x)=1$.

Ergebnis:

Nullstellen der Funktion	$x_1 = -1$	Extremstellen	-
Polstellen der Funktion	$x_2 = -2$	Senkrechte Asymptoten	$x_2 = -2$
hebbare Definitionslücken	-	Waagerechte Asymptoten	$g(x) = 1$
Definitionsbereich	$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$	Schiefe Asymptoten	-
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	1	Näherungsfunktion für $x \rightarrow \pm\infty$ (ab Grad 2)	-
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	1		

b) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x+1}$

Nullstellen Zähler: $x_n^3 + 2x_n^2 = 0 \quad \quad T$ $\Leftrightarrow x_n^2 \cdot (x_n + 2) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0$ (doppelte NST) $\Rightarrow x_2 = -2$	Nullstellen Nenner: $x_3 = -1$
---	--------------------------------

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot (x^2 + 2x)}{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{1 + 0} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot (1 + 0) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \infty$$

Polynomdivision:

$$(x^3 + 2x^2) : (x+1) = x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1} \quad \text{Damit ist} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 + x - 1$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 \\ \hline x^2 + x \\ \hline -x \\ -x - 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

Ergebnis:

Nullstellen der Funktion	$x_1=0; x_2=-2$	Extremstellen	$x_1=0$
Polstellen der Funktion	$x_2=-1$	Senkrechte Asymptoten	$x_2=-1$
hebbare Definitionslücken	-	Waagerechte Asymptoten	-
Definitionsbereich	$D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	Schiefe Asymptoten	-
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	∞	Näherungsfunktion für $x \rightarrow \pm\infty$ (ab Grad 2)	$g(x)=x^2+x-1$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	∞		

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^4-16}$

Nullstellen Zähler: $x_n^2-1=0 \quad \quad T$ $\Leftrightarrow (x_n+1) \cdot (x_n-1)=0$ $\Rightarrow x_1=-1; x_2=1$	Nullstellen Nenner: $x_n^4-16=0 \quad \quad +16$ $\Leftrightarrow x_n^4=16 \quad \quad \sqrt[4]{\quad}$ $\Rightarrow x_3=-2; x_4=2$
---	---

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{x^4-16} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(x^2 - \frac{16}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-0}{x^2-0} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^4-16} = 0$$

Die Polynomdivision ist hier nicht nötig, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist. Das Ergebnis ist dann immer null mit der Funktion als Rest.

Ergebnis:

Nullstellen der Funktion	$x_1=1; x_2=-1$	Extremstellen	-
Polstellen der Funktion	$x_3=-2; x_4=2$	Senkrechte Asymptoten	$x_3=-2; x_4=2$
hebbare Definitionslücken	-	Waagerechte Asymptoten	$g(x)=0$
Definitionsbereich	$D=\mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$	Schiefe Asymptoten	-
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	0	Näherungsfunktion für $x \rightarrow \pm\infty$ (ab Grad 2)	-
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	0		

d) $f(x) = \frac{x^2+6x}{x^2+2x}$

Nullstellen Zähler: $x_n^2+6x_n=0 \quad \quad T$	Nullstellen Nenner: $x_n^2+2x=0 \quad \quad T$
--	--

$\Leftrightarrow x_n \cdot (x_n + 6) = 0$ $\Rightarrow x_1 = -6; x_2 = 0$	$\Leftrightarrow x_n \cdot (x_n + 2) = 0$ $\Rightarrow x_3 = -2; x_4 = 0$
--	--

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 6x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot \left(1 + \frac{6}{x}\right)}{x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 6x}{x^2 + 2x} = 1$$

Ergebnis:

Nullstellen der Funktion	$x_1 = -6$	Extremstellen	-
Polstellen der Funktion	$x_3 = -2$	Senkrechte Asymptoten	$x_3 = -2$
hebbare Definitionslücken	$x_2 = 0$	Waagerechte Asymptoten	$g(x) = 1$
Definitionsbereich	$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$	Schiefe Asymptoten	-
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	1	Näherungsfunktion für $x \rightarrow \pm\infty$ (ab Grad 2)	-
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	1		

e) $f(x) = \frac{x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8}{x^2 - 3x - 4}$

<p>Nullstellen Zähler: $x_n^4 - x_n^3 - 6x_n^2 + 4x_n + 8 = 0 \quad \quad T$</p> <p>$x_1 = -2$ durch Probieren: $(-2)^4 - (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 8 = 0$</p> <p>Polynomdivision durch Linearfaktor: $(x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8) : (x + 2) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2x^3$</p> <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> <p style="margin-left: 20px;">$-3x^3 - 6x^2 + 4x + 8$ $-3x^3 - 6x^2$</p> <hr style="width: 20%; margin-left: 40px;"/> <p style="margin-left: 40px;">$4x + 8$ $4x + 8$</p> <hr style="width: 20%; margin-left: 40px;"/> <p>Restliche NST: $x_n^3 - 3x_n^2 + 4 = 0$</p> <p>$x_2 = -1$ durch Probieren: $(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 = 0$</p>	<p>Polynomdivision durch Linearfaktor: $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x + 1) = x^2 - 4x + 4$ $x^3 + x^2$</p> <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> <p style="margin-left: 20px;">$-4x^2 + 4$ $-4x^2 - 4x$</p> <hr style="width: 20%; margin-left: 40px;"/> <p style="margin-left: 40px;">$4x + 4$ $4x + 4$</p> <hr style="width: 20%; margin-left: 40px;"/> <p style="margin-left: 40px;">0</p> <p>Restliche NST: $x_n^2 - 4x_n + 4 = 0 \quad \quad T$ $\Leftrightarrow (x_n - 2)^2 = 0$ $\Rightarrow x_3 = 2$ (doppelte NST)</p> <p>Nullstellen Nenner: $x_n^2 - 3x - 4 = 0$ p-q-Formel $\Rightarrow x_{4/5} = 1,5 \pm \sqrt{2,25 + 4} = 1,5 \pm 2,5$ $\Rightarrow x_4 = -1; x_5 = 4$</p>
---	--

Polynomdivision

$$(x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8) : (x^2 - 3x - 4) = x^2 + 2x + 4 + \frac{24x + 24}{x^2 - 3x - 4}$$

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{2x^3 - 2x^2 + 4x + 8}$$

$$\frac{2x^3 - 6x^2 - 8x}{4x^2 + 12x + 8}$$

$$\frac{4x^2 - 12x - 16}{24x + 24}$$

Der Restterm geht wieder gegen null, weil Nennergrad > Zählergrad.

Also $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 + 2x + 4 = +\infty$

Ergebnis:

Nullstellen der Funktion	$x_1 = -2; x_3 = 2$	Extremstellen	$x_3 = 2$
Polstellen der Funktion	$x_5 = 4$	Senkrechte Asymptoten	$x_5 = 4$
hebbare Definitionslücken	$x_2 = -1$	Waagerechte Asymptoten	-
Definitionsbereich	$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$	Schiefe Asymptoten	-
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	∞	Näherungsfunktion für $x \rightarrow \pm\infty$ (ab Grad 2)	$g(x) = x^2 + 2x + 4$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	∞		

f) $f(x) = \frac{x^5 - 10x^3 + 20x^2 - 15x + 4}{x^2 - 9}$ Tipp: $x_1 = 1$ ist vierfache NST.

Nullstellen Zähler: $x_1 = 1$

Polynomdivision durch Linearfaktor mit Exponent 4, weil vierfache NST.

$$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

$$(x^5 - 10x^3 + 20x^2 - 15x + 4) : (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) = x + 4$$

$$\frac{x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x}{4x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16x + 4}$$

$$\frac{4x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16x + 4}{4x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16x + 4}$$

$$0$$

Restliche NST: $x_n + 4 = 0 \Rightarrow x_2 = -4$

Nullstellen Nenner:

$$x_n^2 - 9 = 0 \quad | \quad T$$

$$\Leftrightarrow (x+3) \cdot (x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_3 = -3; x_4 = 3$$

Polynomdivision

$$(x^5 - 10x^3 + 20x^2 - 15x + 4) : (x^2 - 9) = x^3 - x + 20 - \frac{24x + 184}{x^2 - 9}$$

$$x^5 - 9x^3$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + 20x^2 - 15x + 4 \\ -x^3 \quad \quad + 9x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20x^2 - 24x + 4 \\ 20x^2 - 180 \end{array}$$

$$-24x + 184$$

Der Restterm geht wieder gegen null, weil Nennergrad > Zählergrad.

Also $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 10x^3 + 20x^2 - 15x + 4}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - x + 20 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 10x^3 + 20x^2 - 15x + 4}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x + 20 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Ergebnis:

Nullstellen der Funktion	$x_1 = 1; x_2 = -4$	Extremstellen	-
Polstellen der Funktion	$x_3 = -3; x_4 = 3$	Senkrechte Asymptoten	$x_3 = -3; x_4 = 3$
hebbare Definitionslücken	-	Waagerechte Asymptoten	-
Definitionsbereich	$D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$	Schiefe Asymptoten	-
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	∞	Näherungsfunktion für $x \rightarrow \pm\infty$ (ab Grad 2)	$g(x) = x^3 - x + 20$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$-\infty$		