Mathematik LK 11 M2, AB 04 – Monotonie, Beschränktheit – Lösung **26.10.2016**

<u>**Aufgabe 1:**</u> Untersuche die folgenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit

1.1 $a_n=\frac{n-1}{n+1}$	**1.2** $a_n=\sqrt{n^2-n}$	**1.3** $a_n=n^3-3n^2$	**1.4** $a_n=n^2 \cdot 2^{-n}$
1.5 $a_n=\frac{n}{n+1}$	**1.6** $a_n=n^2-n^3$	**1.7** $a_n=n^2 \cdot 3^{-n}$	**1.8** $a_n=n+\frac{1}{n}$

<u>**1.1**</u> $a_n=\frac{n-1}{n+1}$ Monotonie:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}-\frac{n-1}{n+1}=\frac{n}{n+2}-\frac{n-1}{n+1}=\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}-\frac{(n-1)\cdot(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+1)-(n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n^2+n-(n^2+n-2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+n-n^2-n+2}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\leq 1>0$$ weil für den Nenner gilt:

$(n+1)(n+2)\geq(1+1)(1+2)=2\,\forall\, n\in\mathbb{N}$ Also: Die Folge ist streng monoton steigend.

Beschränktheit: Die Folge ist nach unten beschränkt und $a_1=\frac{1-1}{1+1}=0$ ist eine untere Schranke.
Dies folgt direkt aus der strengen Monotonie der Folge.

Beh.: Die Folge ist nach oben beschränkt und $S=1$ ist eine obere Schranke.

Bew.: Aus der Behauptung folgt: $a_n\leq S \;\; \forall\, n$

$\frac{n-1}{n+1}\leq 1 \quad |\cdot(n+1) \;\Leftrightarrow\; n-1\leq n+1 \quad |-n \;\Leftrightarrow\; -1\leq 1$ Die Ungleichung ist wahr, also ist die Behauptung wahr und a_n ist nach oben beschränkt.

a_n ist also (nach unten und nach oben) beschränkt.

<u>**1.2**</u> $a_n=\sqrt{n^2-n}$ Monotonie: Annahme: (a_n) ist streng monoton steigend $a_n=\sqrt{n^2-n}$

$\Rightarrow\; a_n<a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{n^2-n}<\sqrt{(n+1)^2-(n+1)} \quad |\,^2$ erlaubt, weil beide Seiten positiv

$\Rightarrow\; n^2-n<(n+1)^2-n-1$

$\Leftrightarrow\; n^2-n<n^2+2n+1-n-1 \quad |-n^2+n$

$\Leftrightarrow\; 0<2n$ wahr $\forall\, n\in\mathbb{N}$ Also: Die Folge ist streng monoton steigend.

Beschränktheit: Die Folge ist nach unten beschränkt und $a_1=\sqrt{1^2-1}=0$ ist eine untere Schranke.
Dies folgt direkt aus der strengen Monotonie der Folge.
Annahme: Die Folge ist nicht nach oben beschränkt. Beweis durch Widerspruch:
Behauptung: Die Folge ist nach oben beschränkt und S eine obere Schranke.
Dann muss gelten: $a_n\leq S \;\; \forall\, n$

$\Leftrightarrow\; \sqrt{n^2-n}\leq S \quad |\,^2$ erlaubt, weil beide Seiten positiv

$\Rightarrow\; n^2-n\leq S^2 \quad |\; T$

$\Leftrightarrow\; n(n-1)\leq S^2$ Weil $n-1<n$ gilt: $(n-1)(n-1)<n(n-1)$ Also

$\Leftrightarrow\; (n-1)(n-1)<n(n-1)\leq S^2$

$\Leftrightarrow\; (n-1)^2\leq S^2 \quad |\sqrt{}$

$\Leftrightarrow\; n-1\leq \pm S \;\Leftrightarrow\; n\leq \pm S+1$

n und S sind natürliche Zahlen. Deshalb ist $-S+1\leq 0$ und $S+1>0$. n kann nicht 0 oder kleiner sein. Das ist ein Widerspruch zu $n\leq -S+1$. $n\leq S+1$ ist auch ein Widerspruch, denn zu jeder natürlichen Zahl S+1 lässt sich eine natürliche Zahl n finden, so dass gilt: $n>S+1$
Also ist die Behauptung unwahr und die Folge hat <u>keine</u> obere Schranke.

<u>1.3</u> $a_n=n^3-3n^2$ Monotonie: Betrachte Folgenglieder

$a_1=1^3-3\cdot 1^2=1-3=-2;a_2=2^3-3\cdot 2^2=8-12=-4;a_3=3^3-3\cdot 3^2=27-27=0;a_4=4^3-3\cdot 4^2=64-48=16;$

$a_5=5^3-3\cdot 5^2=125-75=50.$ Also sind die ersten Folgenglieder $-2;-4;0;16;50;\ldots$

Annahme: Die Folge ist weder monoton steigend, noch monoton fallend.
Monoton steigend: Es muss $a_n<a_{n+1}$ für alle n gelten. Also genügt es ein einziges n zu finden, für das $a_n<a_{n+1}$ nicht gilt, nämlich $n=1$, denn $a_1>a_2$. Damit ist die Folge nicht monoton steigend.
Monoton fallend: Es muss $a_n>a_{n+1}$ für alle n gelten. Also genügt es ein einziges n zu finden, für das $a_n>a_{n+1}$ nicht gilt, nämlich z.B. $n=2$, denn $a_2<a_3$. Damit ist die Folge nicht monoton fallend.

Beschränktheit: Behauptung: Die Folge ist nach unten beschränkt und $a_2=-4$ ist eine untere Schranke. Dann muss gelten: $a_n\geq -4\ \forall n$

$\Leftrightarrow\ n^3-3n^2\geq -4\ \Leftrightarrow\ n^2(n-3)\geq -4$ Diese Behauptung ist mindestens wahr für $n>3$, denn $n^2>0\ \forall n$ und $(n-3)>0\ \forall n>3$ und damit $n^2(n-3)>0\geq -4\ \forall n>3.$ Bleibt nur noch $n=1$ und $n=2$ zu prüfen und das haben wir oben schon ausgerechnet. $a_1\geq -4$ und $a_2\geq -4.$ Damit gilt die Behauptung für alle n.

<u>1.4</u> $a_n=n^2\cdot 2^{-n}$ Monotonie: Betrachte Folgenglieder: $a_1=\frac{1^2}{2^1}=\frac{1}{2};a_2=\frac{2^2}{2^2}=1;a_3=\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8};$

$a_4=\frac{4^2}{2^4}=\frac{16}{16}=1;a_5=\frac{5^2}{2^5}=\frac{25}{32}$ Also sind die ersten Folgenglieder $\frac{1}{2};1;\frac{9}{8};1;\frac{25}{32};\frac{36}{64};\frac{49}{128};\ldots$

Die Folge ist weder monoton steigend, noch monoton fallend, weil sie zunächst steigt und dann fällt.

Um eine weitere Beweistechnik zu zeigen, hier eine Alternativbeweis (schöner, allerdings komplizierter):

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)^2\cdot 2^{-(n+1)}-n^2\cdot 2^{-n}=(n+1)^2\cdot 2^{-n-1}-n^2\cdot 2^{-n}=(n+1)^2\cdot 2^{-n}\cdot 2^{-1}-n^2\cdot 2^{-n}=2^{-n}\cdot\left[(n+1)^2\cdot 2^{-1}-n^2\right]$$
$$=\frac{1}{2^n}\cdot\left[\frac{(n+1)^2}{2}-n^2\right]=\frac{1}{2^n}\cdot\left[\frac{(n+1)^2}{2}-\frac{2n^2}{2}\right]=\frac{1}{2^n}\cdot\left[\frac{(n+1)^2-2n^2}{2}\right]=\frac{1}{2^n}\cdot\left[\frac{-n^2+2n+1}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{2^n}\cdot\left[-\frac{n^2-2n-1}{2}\right]$$

Der erste Faktor $\frac{1}{2^n}$ ist immer positiv. Der zweite Faktor ist

- negativ, wenn $n^2-2n-1>0\ \forall n$ Dann wäre das Produkt immer negativ und die Folge wäre monoton fallend.
- positiv, wenn $n^2-2n-1<0\ \forall n$ Dann wäre das Produkt immer positiv und die Folge wäre monoton steigend.

Wenn n^2-2n-1 aber manchmal positiv und manchmal negativ ist, kann man die Stelle für den Wechsel des Vorzeichens finden, wenn man n^2-2n-1 als Funktionsterm einer Funktion

$f(x)=x^2-2x-1$ mit $x\in\mathbb{R}$ ansieht und nach Nullstellen sucht.

$0=x_n^2-2x_n-1$ Mit p-q-Formel:
$x_{1/2}=1\pm\sqrt{(-1)^2+1}=1\pm\sqrt{2} \Rightarrow x_1=1-\sqrt{2}\approx-0{,}414 \;;\; x_2=1+\sqrt{2}\approx2{,}414$

Die erste Nullstelle im Negativen ist uninteressant, da $n\in\mathbb{N}$. Das Ergebnis von x_2 bedeutet aber: Von $n=2$ zu $n=3$ wechselt der Term n^2-2n-1 das Vorzeichen. Damit ist $a_{n+1}-a_n$ mal negativ, mal positiv und (a_n) somit weder monoton steigend, noch monoton fallend.

Beschränktheit: Behauptung: $I=0$ ist eine untere Schranke von (a_n) Also muss gelten:
$a_n\geq0 \;\;\forall n$
$\Leftrightarrow\; n^2\cdot2^{-n}=\frac{n^2}{2^n}\geq0$ Das ist wahr, denn $n^2>0 \;\;\forall n\in\mathbb{N}$ und $2^n>0 \;\;\forall n\in\mathbb{N}$.

Behauptung: $S=2$ ist eine obere Schranke von (a_n) Also muss gelten: $a_n\leq1 \;\;\forall n$
$\Leftrightarrow\; \frac{n^2}{2^n}\leq2 \;\Leftrightarrow\; n^2\leq2\cdot2^n=2^{n+1}$

Für $n=1$ ist diese Ungleichung wahr, denn $1^2\leq2^2 \;\Leftrightarrow\; 1\leq4$
Für $n=2$ ist diese Ungleichung wahr, denn $2^2\leq2^3 \;\Leftrightarrow\; 4\leq8$

Jetzt zeigen wir: Falls $n^2\leq2^n$ für n gilt, so gilt es auch für $n+1$
$n^2\leq2^{n+1} \;\;|\; \cdot2$
$\Leftrightarrow 2n^2\leq2\cdot2^{n+1} \;\;|\; T$
$\Leftrightarrow 2n^2\leq2^{n+2}$ Diese Ungleichung soll so umgeformt werden, dass in der Ursprungsbehauptung $n^2\leq2^{n+1}$ statt des n jedes Mal $n+1$ steht. Die rechte Seite ist schon fertig. Auf der linken Seite wollen wir $(n+1)^2$ stehen haben. Falls nun gilt: $(n+1)^2<2n^2$, so können wir die linke Seite der Ungleichung einfach ersetzen.

Dazu eine Zwischenrechnung:
Weitere Behauptung: $2n^2>(n+1)^2$ Beweis: $2n^2>(n+1)^2 \;\Leftrightarrow\; 2n^2>n^2+2n+1 \;\Leftrightarrow\; n^2-2n-1>0$
Von Aufgabe 1.4 wissen wir, dass der Term n^2-2n-1 nur von $n=2$ zu $n=3$ das Vorzeichen wechselt. Für $n=3$ gilt: $3^2-2\cdot3-1=9-7=2>0$ Wenn er also für $n=3$ größer 0 ist, muss das auch für alle weiteren $n>3$ gelten, (denn der Term wechselt das Vorzeichen ja nicht mehr).

Also: $2n^2>(n+1)^2 \;\Leftrightarrow\; (n+1)^2<2n^2$ Damit:
$(n+1)^2<2n^2\leq2^{n+2}$ und
$(n+1)^2\leq2^{n+2}$

Wir haben also gezeigt: Aus $n^2\leq2^{n+1}$ folgt $(n+1)^2\leq2^{n+2}$. Gilt sie also für n, so gilt sie auch für $n+1$. Da sie für $n=1$ und $n=2$ gilt (s.o.), muss sie auch für $n=3, n=4, n=5$, usw. gelten.

Also ist unsere Behauptung, dass $S=2$ ist eine obere Schranke von (a_n) ist, wahr.

Die Folge ist also sowohl nach oben, als auch nach unten beschränkt.

<u>1.5</u> $a_n=\frac{n}{n+1}$ Monotonie: Betrachte Folgenglieder: $a_n=\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7};\ldots$

Daraus können wir direkt folgende Vermutungen aufstellen:
a) Die Folge ist streng monoton steigend
b) Die Folge ist nach unten beschränkt mit $I=0{,}5$ als untere Schranke.
c) Die Folge ist nach oben beschränkt mit $S=1$ als obere Schranke.

zu a) Streng monoton steigend: $a_n<a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{(n+1)+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2} \quad | \cdot(n+1)(n+2)$

$\Leftrightarrow n(n+2)<(n+1)^2 \Leftrightarrow n^2+2n<n^2+2n+1 \quad | -n^2-2n \Leftrightarrow 0<1$ q.e.d.

zu b) $I=0{,}5$ untere Schranke: $\Rightarrow a_n\geq 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1}\geq 0{,}5 \quad | \cdot(n+1)$

$\Leftrightarrow n\geq 0{,}5\cdot(n+1) \quad | \cdot 2 \Leftrightarrow 2n\geq n+1 \quad | -n \Leftrightarrow n\geq 1$ wahr, weil $n\in\mathbb{N}$ q.e.d.

zu c) $S=1$ obere Schranke: $\Rightarrow a_n\leq 1 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1}\leq 1 \quad | \cdot(n+1)$

$\Leftrightarrow n\leq n+1 \quad | -1 \Leftrightarrow 0\leq 1$ q.e.d.

<u>1.6</u> $a_n=n^2-n^3$ Erste Folgenglieder: $a_n=0;-4;-18;-48;\ldots$ Vermutungen:

a) Die Folge ist streng monoton fallend.
b) Die Folge ist nach oben beschränkt mit $S=0$ als obere Schranke.
c) Die Folge ist nicht nach unten beschränkt.

zu a) Streng monoton fallend:

$\Rightarrow a_n>a_{n+1} \Leftrightarrow n^2-n^3>(n+1)^2-(n+1)^3 \Leftrightarrow n^2-n^3>n^2+2n+1-(n^3+3n^2+3n+1)$

$\Leftrightarrow n^2-n^3>n^2+2n+1-n^3-3n^2-3n-1 \Leftrightarrow n^2-n^3>-n^3-2n^2-n \quad | +n^3+2n^2+n$

$\Leftrightarrow 3n^2+n>0$ wahr, weil $n\in\mathbb{N}$ q.e.d.

zu b) $S=0$ obere Schranke: $\Rightarrow a_n\leq 0 \Leftrightarrow n^2-n^3\leq 0 \Leftrightarrow n^2(1-n)\leq 0$ n^2 ist immer positiv.
$(1-n)$ ist entweder 0 (für n=1) oder negativ. Damit ist die Ungleichung wahr. q.e.d.

zu c) Nicht nach unten beschränkt: Angenommen, es gibt ein I, das untere Schranke ist.

$\Rightarrow a_n\geq I \Leftrightarrow n^2-n^3\geq I \Leftrightarrow n^2(1-n)\geq I$ Der linke Term ist fast immer negativ (außer für n=1).

Also gilt: $1-n\geq n^2(1-n)$ Damit

$1-n\geq n^2(1-n)\geq I \Leftrightarrow 1-n\geq I \Leftrightarrow -n\geq I-1 \quad | \cdot(-1) \Leftrightarrow n\leq -I+1$ Widerspruch!

Egal, welchen Wert man für I wählt, es gibt immer ein $n\in\mathbb{N}$, für das die Ungleichung unwahr ist.
Die Folge ist also nach unten unbeschränkt.

<u>1.7</u> $a_n=n^2\cdot 3^{-n}$ Erste Folgenglieder:

Also sind die ersten Folgenglieder $\frac{1}{3};\frac{4}{9};\frac{1}{3};\frac{16}{81};\frac{25}{243};\ldots.$

Die Folge ist weder monoton steigend, noch monoton fallend, weil sie zunächst steigt und dann fällt.

Beschränktheit: Behauptung: $I=0$ ist eine untere Schranke von (a_n) Also muss gelten:
$a_n\geq 0 \quad \forall n$

$\Leftrightarrow\ n^2 \cdot 3^{-n} = \frac{n^2}{3^n} \geq 0$ Das ist wahr, denn $n^2 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $3^n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: $S = \frac{1}{2}$ ist eine obere Schranke von (a_n) Also muss gelten: $a_n \leq \frac{1}{2}\ \forall n$

$\Leftrightarrow \frac{n^2}{3^n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n^2 \leq \frac{3^n}{2} \Leftrightarrow 2n^2 \leq 3^n$

Für $n=1$ ist diese Ungleichung wahr, denn $2 \cdot 1^2 \leq 3^1 \Leftrightarrow 2 \leq 3$

Da wir die Ungleichung $n^2 \leq 2^n$ bereits bewiesen haben, machen wir eine Abschätzung:

$2^n \leq \frac{3^n}{2}\ \forall n \geq 2$

Beweis: $2^n \leq \frac{3^n}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^n \leq 3^n \Leftrightarrow 2^{n+1} \leq 3^n \Leftrightarrow e^{\ln(2^{n+1})} \leq e^{\ln(3^n)} \Leftrightarrow e^{(n+1) \cdot \ln(2)} \leq e^{n \cdot \ln(3)}\ \mid \ln$

$\Leftrightarrow (n+1) \cdot \ln(2) \leq n \cdot \ln(3) \Leftrightarrow n \cdot \ln(2) + \ln(2) \leq n \cdot \ln(3)\ \mid -n \cdot \ln(2)$

$\ln(2) \leq n \cdot (\ln(3) - \ln(2)) \Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} \leq n$ Die Ungleichung ist für $n \geq 2$ erfüllt, denn

$\frac{\ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} \approx 1{,}71$

Also gilt $n^2 \leq 2^n \leq \frac{3^n}{2} \Leftrightarrow n^2 \leq \frac{3^n}{2}$ q.e.d.

Die Folge ist also sowohl nach oben, als auch nach unten beschränkt.

<u>1.8</u> $a_n = n + \frac{1}{n}$ Erste Folgenglieder: $a_n = 1 + \frac{1}{1}; 3 + \frac{1}{3}; 4 + \frac{1}{4}; 5 + \frac{1}{5}; \ldots$ Vermutungen:

a) Die Folge ist streng monoton steigend.
b) Die Folge ist nach unten beschränkt mit $I = 2$ als untere Schranke.
c) Die Folge ist nicht nach oben beschränkt.

zu a) Streng monoton steigend: $\Rightarrow a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow n + \frac{1}{n} < (n+1) + \frac{1}{n+1}\ \mid -n - \frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} < 1 \Leftrightarrow \frac{n+1-n}{n^2+n} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2+n} < 1\ \mid \cdot (n^2+n)$

$\Leftrightarrow 1 < n^2 + n$ wahr für $n \in \mathbb{N}$ q.e.d.

zu b) Untere Schranke $I = 0$: $a_n \geq 0 \Leftrightarrow n + \frac{1}{n} \geq 0$ wahr,

denn aus $n \in \mathbb{N}$ folgt: $n > 0$ und $\frac{1}{n} > 0$ q.e.d.

zu c) Keine obere Schranke: Sei S eine obere Schranke $\Rightarrow a_n \leq S \Leftrightarrow n + \frac{1}{n} \leq S$ Abschätzung:

$0 \leq \frac{1}{n}$ wahr, weil $n \in \mathbb{N}$. Also $0 \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n + 0 \leq n + \frac{1}{n}$ und damit $n \leq n + \frac{1}{n} \leq S \Leftrightarrow n \leq S$

Das ist wieder ein Widerspruch, da es immer eine natürliche Zahl gibt, die größer sein kann.

Also ist die Folge nach unten, aber nicht nach oben beschränkt.