Mathematik LK M2, 1. KA – Mittelstufe / Mengen / Folgen – Lösung 27.09.2016

Aufgabe 1: Löse die folgenden Gleichungen. („Probieren“ ist keine zulässige Lösungsmethode).

1.1 $\sqrt{4x^2+5}=2x-1 \quad \mid {}^2$ $\Rightarrow\ 4x^2+5=(2x-1)^2 \quad \mid T$ $\Leftrightarrow\ 4x^2+5=4x^2-4x+1 \quad \mid -4x^2$ $\Leftrightarrow\ 5=-4x+1 \quad \mid -1$ $\Leftrightarrow\ 4=-4x \quad \mid :(-4)$ $\Leftrightarrow\ -1=x$ Probe: $\sqrt{4\cdot(-1)^2+5}=2\cdot(-1)-1$ $\Leftrightarrow\ \sqrt{4+5}=-3$ unwahr, also $\boldsymbol{L=\{\ \}}$	**1.2** $\log_2(4^x\cdot 2x)=\log_a(2x)+16 \quad \mid T$ $\Leftrightarrow\ x\cdot\log_2(4)+\log_2(2x)=\log_2(2x)+16 \quad \mid -\log_2(2x)$ $\Leftrightarrow\ x\cdot 2=16 \quad \mid :2$ $\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x=8}$
	1.3 $2^{x+1}=4^{2x} \quad \mid T$ $\Leftrightarrow 2^{x+1}=\left(2^2\right)^{2x} \quad \mid T$ $\Leftrightarrow 2^{x+1}=2^{4x} \quad \mid \log_2()$ $\Leftrightarrow x+1=4x \quad \mid -x$ $\Leftrightarrow 1=3x \quad \mid :3$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{x=\frac{1}{3}}$

Aufgabe 2: Berechne die folgenden Terme durch Umformen bzw. vereinfache sie so weit wie möglich.

2.1 $\sqrt[1000]{2^{2000}}=2^{\frac{2000}{1000}}=2^2=\boldsymbol{4}$	**2.2** $\log_2(72)-\log_2(9)$ $=\log_2\left(\frac{72}{9}\right)=\log_2(8)=\boldsymbol{3}$	**2.3** $\frac{x^k-x^{k+1}}{x^k}=\frac{x^k\cdot(1-x)}{x^k}=\boldsymbol{1-x}$

2.4 $\log_a(a^4b^4c^4)-\log_a\left(\frac{(0{,}5ac^2+0{,}5bc^2)\cdot b^2}{(0{,}5a^2+ab+0{,}5b^2)\cdot c^2}\right)+\frac{\log_d\left((a+b)b^{-2}c^{-4}\right)}{\log_d(a)}$

$=\log_a(a^4b^4c^4)-\log_a\left(\frac{0{,}5c^2\cdot(a+b)\cdot b^2}{0{,}5\cdot(a^2+2ab+b^2)\cdot c^2}\right)+\log_a\left((a+b)b^{-2}c^{-4}\right)$

$=\log_a(a^4b^4c^4)-\log_a\left(\frac{(a+b)\cdot b^2}{(a+b)^2}\right)+\log_a\left((a+b)b^{-2}c^{-4}\right)$

$=\log_a(a^4b^4c^4)-\log_a\left(\frac{b^2}{(a+b)}\right)+\log_a\left((a+b)b^{-2}c^{-4}\right)$

$=\log_a\left(\frac{a^4b^4c^4(a+b)^2}{b^2\cdot b^2c^4}\right)=\log_a(a^4(a+b)^2)=\boldsymbol{4+2\log_a(a+b)}$

Aufgabe 3: Der Graph einer kubischen Funktion *f* vom Typ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ geht durch die Punkte $A(-1|-50), B(0|-16), C(2|4)$ und $D(3|2)$.

3.1 Berechne die Funktionsgleichung mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems. (Kontrolllösung: $f(x)=x^3-9x^2+24x-16$)

Punkte in die Funktionsgleichung einsetzen:

$I.\quad -50=a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)+d$ $II.\quad -16=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d$ $III.\quad 4=a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d$ $IV.\quad 2=a\cdot 3^3+b\cdot 3^2+c\cdot 3+d$ $I.\quad -50=-a+b-c+d$ $II.\quad -16=d$ $III.\quad 4=8a+4b+2c+d$ $IV.\quad 2=27a+9b+3c+d$ Setze $d=-16$ in die übrigen Gleichungen ein: $I.\quad -50=-a+b-c-16 \quad \| +16$ $III.\quad 4=8a+4b+2c-16 \quad \| +16$ $IV.\quad 2=27a+9b+3c-16 \quad \| +16$ $I.\quad -34=-a+b-c \quad \| \; 2I.+II.$ $III.\quad 20=8a+4b+2c$ $IV.\quad 18=27a+9b+3c \quad \| \; III.+3I.$	$Ia.\quad -48=6a+6b \quad \| \cdot(-2)$ $IVa.\quad -84=24a+12b$ $Ib.\quad 96=-12a-12b \quad \| \; Ia.+IVa.$ $IVb.\quad -84=24a+12b$ $12=12a \Leftrightarrow a=1$ Setze $a=1$ in Ia. ein: $-48=6+6b \Leftrightarrow -54=6b \Leftrightarrow b=-9$ Setze $a=1$ und $b=-9$ in III. ein: $20=8+4\cdot(-9)+2c \Leftrightarrow 20=-28+2c$ $48=2c \Leftrightarrow c=24$ Also $\mathbf{f(x)=x^3-9x^2+24x-16}$

3.2 Die Funktionsgleichung von *f* lässt sich auch in der Form $f(x)=(x-1)\cdot(x-4)^2$ schreiben. $x_2=4$ ist eine sogenannte doppelte Nullstelle. Beschreibe den Verlauf des Graphen von *f* in der Umgebung dieser Nullstelle. Was passiert mit den Funktionswerten und was ist anders als bei der Nullstelle $x_1=1$? Begründe diesen unterschiedlichen Verlauf des Graphen in der Nähe der Nullstellen. (Es müssen keine Funktionswerte berechnet werden).

In der Umgebung der Nullstelle $x_2=4$ ändern die Funktionswerte ihre Vorzeichen nicht. Für x-Werte etwas kleiner als 4 oder größer als 4 sind die Funktionswerte positiv, denn $(x-1)$ ist positiv und $(x-4)^2$ sowieso. Der Funktionsgraph berührt die x-Achse also nur und hat bei $x_2=4$ ein Minimum.
Bei $x_1=1$ ändern sich die Vorzeichen dagegen. Für x-Werte etwas kleiner als 1 sind die Funktionswerte positiv, denn $(x-1)$ ist positiv und $(x-4)^2$ sowieso. Für x-Werte etwas größer als 1 sind die Funktionswerte negativ, denn $(x-1)$ wird negativ. Der Graph schneidet hier also die x-Achse.

<u>Aufgabe 4:</u> Gegeben sind die folgenden Mengen $A=\{-2;-1;0;1;2\}$, $B=\{0;1;2\}, C=\{0;1;2;3;4\}$ und $D=\{-4;-3;-2;-1;0\}$.

<u>4.1.</u> Zähle die Elemente der folgenden Mengen auf (so wie oben für A,B,C,D):

<u>4.1.1</u> *F* ist die Vereinigungsmenge von *B* und *D.* $\boldsymbol{F=\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}}$

<u>4.1.2</u> *G* ist die Differenzmenge von „*D* ohne *B*". $\boldsymbol{G=\{-4;-3;-2;-1\}}$

<u>4.1.3</u> *H* ist die Schnittmenge von *B* und *D.* $\boldsymbol{H=\{0\}}$

<u>4.2</u> Gib jeweils ein passendes Beispiel an:

<u>4.2.1</u> *K* ist eine echte Teilmenge von *A.* Z.B. $\boldsymbol{K=\{0;1\}}$

<u>4.2.2</u> Die Zahl *a* ist eine obere Schranke der Menge *A.* Z.B. $\boldsymbol{a=4}$

<u>4.2.3</u> Die Zahl *c* ist eine untere Schranke der Menge *C.*Z.B. $\boldsymbol{c=-88}$

<u>4.3</u> Die Menge *E* besteht aus allen Zahlen *x* im Intervall $[0;2]$, für die gilt: *x* lässt sich als Bruch $x=\frac{a}{b}$ darstellen mit $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}, b<100$ und „b ist durch 50 teilbar".

<u>4.3.1</u> Gib drei Elemente der Menge *E* an. Z.B. $\boldsymbol{\frac{1}{50};\frac{2}{50};\frac{3}{50}}$

<u>4.3.2</u> Gib das Supremum der Menge *E* an, falls es existiert. $\boldsymbol{\sup(E)=\frac{100}{50}=2}$

<u>4.3.3</u> Gib das Infimum der Menge *E* an, falls es existiert. $\boldsymbol{\inf(E)=\frac{0}{50}=0}$

<u>4.3.4</u> Gib die Mächtigkeit der Menge *E* an, also die Anzahl der Elemente, welche die Menge *E* enthält.

Das sind alle Brüche von $\frac{0}{50}$ bis $\frac{100}{50}$, , also **101**.

<u>Aufgabe 5:</u> Mit einer rekursiven Vorschrift für Zahlenfolgen berechnet man den Wert des aktuellen Folgenglieds mit Hilfe des Wertes der vorherigen Folgenglieds (z.B. $a_n=a_{n-1}+1$) unter Angabe eines Startwertes (z.B. $a_1=4$). Mit einer expliziten Vorschrift kann man den Wert des n-ten Folgenglieds direkt aus *n* berechnen. (z.B. $a_n=3+n$). *n* ist immer eine natürliche Zahl (ohne Null).

<u>5.1.</u> Gib für die folgenden Zahlenfolgen eine rekursive <u>und</u> eine explizite Vorschrift an.

<u>5.1.1</u> Die Folge der natürlichen, geraden Zahlen *2, 4, 6, 8, 10, ...* .

rekursiv: $\boldsymbol{a_n=a_{n-1}+2}$ mit $\boldsymbol{a_1=2}$; explizit: $\boldsymbol{a_n=2n}$

Mathematik LK M2, 1. KA – Mittelstufe / Mengen / Folgen – Lösung 27.09.2016

5.1.2 Die Folge der Quadratzahlen *1, 4, 9, 16, 25, 36, ...*

rekursiv: $\boldsymbol{a_n} = a_{n-1} + 2(n-1) + 1 = \boldsymbol{a_{n-1} + 2n - 1}$ mit $\boldsymbol{a_1 = 1}$; explizit: $\boldsymbol{a_n = n^2}$

5.2 Eine Zahlenfolge hat die rekursive Vorschrift $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ mit $a_1 = a_2 = 1.$ Gib die ersten zehn Glieder dieser Folge an. $\boldsymbol{1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; \ldots}$

5.3. Eine Zahlenfolge hat die rekursive Vorschrift $\boldsymbol{a_n = 2a_{n-1} - 1}$ mit $\boldsymbol{a_1 = 2}$

5.3.1 Gib die ersten zehn Glieder dieser Folge an.

$\boldsymbol{2; 3; 5; 9; 17; 33; 65; 129; 257; 513; 1025; \ldots}$

5.3.2 Gib eine explizite Vorschrift für diese Folge an.

$\boldsymbol{a_n = 2^{n-1} + 1}$

5.3.3 Beweise, dass es die richtige explizite Vorschrift für diese Folge ist.

Aus $a_n = 2a_{n-1} - 1$ folgt $a_{n+1} = 2a_n - 1.$ Explizite Vorschrift einsetzen:

$a_{n+1} = 2 \cdot (2^{n-1} + 1) - 1 = 2^n + 2 - 1 = 2^n + 1$ q.e.d.

Aufgabe 6: Beweise mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion

6.1 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis:

Induktionsanfang $n = 1$: $\sum_{k=0}^{0} k = 0$ und $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n+1} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$ q.e.d.

6.2 $\prod_{k=1}^{n} 4^k = 2^{n(n+1)}$

Induktionsanfang $n = 1$: linke Seite: $\prod_{k=1}^{1} 4^k = 4^1 = 4$ rechte Seite: $2^{1(1+1)} = 2^2 = 4$ o.k.

Induktionsschritt $n \to n+1$: $\prod_{k=1}^{n+1} 4^k = 4^{n+1} \cdot \prod_{k=1}^{n} 4^k$ Behauptung einsetzen:

$$= 4^{n+1} \cdot 2^{n(n+1)} = \left(2^2\right)^{n+1} \cdot 2^{n(n+1)} = 2^{2(n+1)} \cdot 2^{n(n+1)} = 2^{2(n+1) + n(n+1)} = 2^{(n+1)(n+2)}$$ q.e.d.