Mathematik LK M2, 3. KA – Differentialrechnung – Lösung 07.06.2016

Aufgabe 1: Ableitungsregeln

Bilde die Ableitungen und vereinfache so weit wie möglich.

1.1 $f(x)=-2x^{-4}+\frac{1}{x^2}$. Berechne *f'(x)*. $f'(x)=8x^{-5}-2x^{-3}=\frac{8}{x^5}-\frac{2}{x^3}$

1.2 $f(x)=(x^2-2x+1)\cdot\sin(x)$. Berechne *f'(x)*.

$$f(x)=(x^2-2x+1)\cdot\sin(x)=(x-1)^2\cdot\sin(x)$$
$$f'(x)=2(x-1)\cdot 1\cdot\sin(x)+(x-1)^2\cdot\cos(x)=(x-1)\cdot\big(2\sin(x)+(x-1)\cos(x)\big)$$

1.3 $f(x)=\sin(x^2+2x)\cdot e^{-x^2+2x}$ Berechne *f'(x)*.

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)\ \ ;\ \ u(x)=\sin(x^2+2x)\ \ ;\ \ v(x)=e^{-x^2+2x}$$
$$u'(x)=(2x+2)\cdot\cos(x^2+2x)\ \ ;\ \ v'(x)=(-2x+2)\cdot e^{-x^2+2x}$$

$$f'(x)=(2x+2)\cdot\cos(x^2+2x)\cdot e^{-x^2+2x}+\sin(x^2+2x)\cdot(-2x+2)e^{-x^2+2x}$$
$$=e^{-x^2+2x}\cdot\big((2x+2)\cdot\cos(x^2+2x)-\sin(x^2+2x)\cdot(2x-2)\big)$$

1.4 $f(x)=\left(\sin(x)+\frac{\sin(x)}{\tan(x)}\right)^2$ Berechne *f'(x)*.

$$f(x)=\left(\sin(x)+\frac{\sin(x)}{\tan(x)}\right)^2=\left(\sin(x)+\frac{\sin(x)}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}\right)^2=\big(\sin(x)+\cos(x)\big)^2$$
$$=\sin^2(x)+2\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x)=1+2\sin(x)\cos(x)$$

$$f'(x)=2(\cos(x)\cos(x)+\sin(x)\cdot(-\sin(x)))=2(\cos^2(x)-\sin^2(x))$$

Aufgabe 2: Gebrochen rationale Funktion

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{x^3-5x^2-46x-40}{x^2-2x+1}$ und ihre Ableitungen

$$f'(x)=\frac{x^3-3x^2+56x+126}{(x-1)^3},f''(x)=-2\cdot\frac{53x+217}{(x-1)^4} \text{ und } f'''(x)=6\cdot\frac{53x+307}{(x-1)^5}.$$

2.1 Berechne die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen.

$f(x)=\frac{x^3-5x^2-46x-40}{(x-1)^2}$ Schnittpunkt y-Achse: $f(0)=\frac{-40}{1}=-40 \Rightarrow \boldsymbol{S_y(0|-40)}$

Schnittpunkt x-Achse: Suche Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners $(x_1=1)$ sind.

$0=x_n^3-5x_n^2-46x_n-40 \;\Rightarrow\; x_1=-1$ durch Probieren.

$$
\begin{array}{l}
(x^3-5x^2-46x-40):(x+1)=x^2-6x-40\\
-\underline{(x^3+\;\;x^2)}\\
\quad -6x^2-46x-40\\
\quad -\underline{(-6x^2-6x)}\\
\qquad -40x-40\\
\qquad -\underline{(40x-40)}\\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Restliche NST: $0=x_n^2-6x_n-40$

$\Rightarrow\; x_{2/3}=3\pm\sqrt{(-3)^2+40}=3\pm\sqrt{49}=3\pm 7$

$\Rightarrow\; x_2=3-7=-4\;;\; x_3=3+7=10$

$\Rightarrow\; \boldsymbol{S_{x1}(-4|0);S_{x2}(-1|0);S_{x3}(10|0)}$

<u>**2.2**</u> Bestimme die Polstellen und das Grenzwertverhalten der Funktion an den Polstellen.

Polstelle: $x_1=1$ doppelte Polstelle

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{(x-10)(x+1)(x+4)}{(x-1)^2}=-\infty=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ weil doppelte Polstelle

<u>**2.3**</u> Berechne eine von *f* verschiedene Funktion *g*, für die gilt: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=0$

Gesucht ist eine Asymptote.

$$
\begin{array}{l}
(x^3-5x^2-46x-40):(x^2-2x+1)=x-3+\dfrac{-53x-37}{x^2-2x+1}\\
-\underline{(x^3-2x^2+\quad x)}\\
\quad -3x^2-47x-40\\
\quad -\underline{(-3x^2+\;6x-\;3)}\\
\qquad -53x-37
\end{array}
$$

Also $g(x)=x-3$

Aufgrund der Formulierung des Aufgabenstellung kann man sich die Sache auch sehr leicht machen, z.B. mit $g(x)=f(x)-\frac{1}{x}$, dann ist $f(x)-g(x)=f(x)-f(x)+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$, was natürlich wie verlangt gegen Null läuft.

<u>**2.4**</u> Berechne die Wendepunkte von *f*.

Notwendige Bedingung: $f''(x_W)=0$	Hinreichende Bedingung: $f'''(x_W)\neq 0$
$0=-2\cdot\frac{53x_W+217}{(x_W-1)^4}\quad \vert\ :(-2)\cdot(x_W-1)^4\, für\, x_W\neq 1$ $0=53x_W+217\quad \vert\ -307$ $-217=53x_W\quad \vert\ :53$ $x_W=-\frac{217}{53}\approx -4{,}09$	$f'''(x_W)=6\cdot\frac{53x+307}{(x-1)^5}\neq 0,$ weil $x_W\neq -\frac{307}{53}$ y-Koordinate: $f(x_W)=\frac{x_W^4-2x_W^3-2x_W^2}{(x_W-1)^2}=-0{,}15853715$ Also $\boldsymbol{W(-4{,}09\vert -0{,}16)}$

2.5 Berechne die durchschnittliche Änderungsrate der Funktion *f* im Bereich von $x_1=-4$ bis $x_2=10$.

$$\boldsymbol{m}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{0-0}{10-(-4)}=\mathbf{0}$$

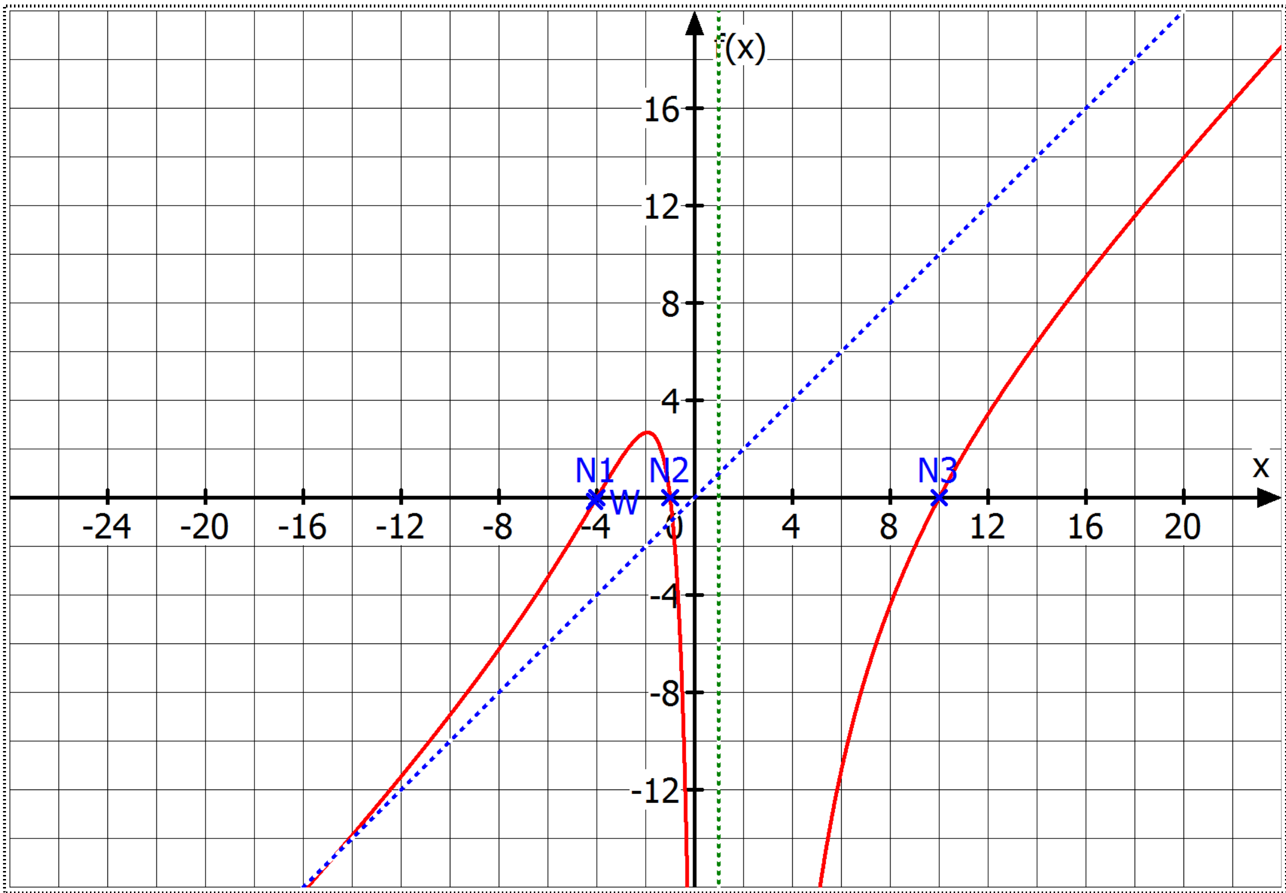
2.6 Wir spielen Mathelotto. Felicitas wählt eine zufällige ganze Zahl aus dem Intervall $[-10;+10]$. Katharina berechnet den Funktionswert von *f* für diese Zahl und erhält eine neue Zahl. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Katharinas Zahl positiv ist.

Die Nullstellen sind *-4*, *-1* und *10*. Für $x<-4$ gilt: $f(x)<0$, weil $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

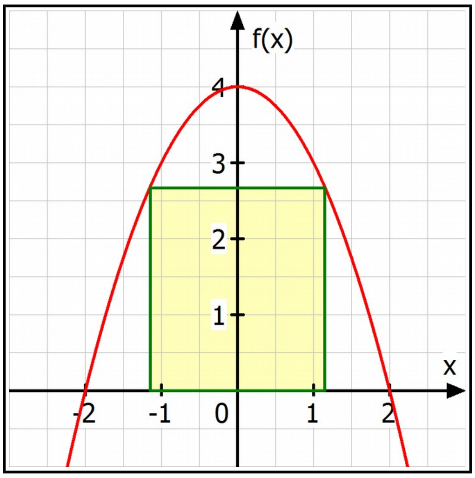
Also sind $f(-3)>0$ und $f(-2)>0$. Zwischen *-1* und *10* sind die Funktionswerte wieder negativ.

Es gibt 21 ganze Zahlen im Intervall $[-10;+10]$. Davon sind zwei positiv. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\boldsymbol{p}=\frac{2}{21}\approx 0{,}095=\mathbf{9{,}5}\,\%$.

2.7 Trage die berechneten Punkte aus den Aufgaben 2.1 bis 2.4 in das Koordinatesystem auf der nächsten Seit ein (soweit möglich) und skizziere den Graphen der Funktion unter Benutzung der Ergebnisse der Aufgaben 2.1-2.4.



<u>Aufgabe 3:</u> Extremwertaufgabe



Unter der Parabel der Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ soll ein größtmögliches Rechteck einbeschrieben werden, das von der x-Achse begrenzt wird.

Berechne den Flächeninhalt dieses Rechtecks.

Zielfunktion: $A(b,h) = b \cdot h$
Nebenbedingungen: $b = 2x \;;\; h = f(x)$
Einsetzen: $A(x) = 2x \cdot (-x^2 + 4) = -2x^3 + 8x$
$\Rightarrow A'(x) = -6x^2 + 8 \Rightarrow A''(x) = -12x$

Suche Maximum:

$$0 = -6x_E^2 + 8 \Leftrightarrow -8 = -6x_E^2 \Leftrightarrow \frac{4}{3} = x_E^2 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3} \approx 1{,}15$$

$$A''(x_1) = -12 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$A(x_1) = -2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{16}{\sqrt{3}^3} + \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{27}} + \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{9} \approx 6{,}16$$

A: Der maximale Flächeninhalt beträgt 6,16 F.E..

<u>Aufgabe 4:</u> Funktionsbestimmung

Eine ganzrationalen Funktion vierten Grades hat eine doppelte Nullstelle bei $x_1=4$ und einen Hochpunkt $H(1|81)$. Die Sekante durch die Punkte $(4|0)$ und $(0|y_2)$ hat die Steigung $m=-16$. Berechne die Funktionsgleichung der Funktion.

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \Rightarrow f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

Bekannte Informationen:

Nullstelle bei $x_1=4$: $\Rightarrow I.\ f(4)=0$
Nullstelle doppelt, also Extremstelle: $\Rightarrow II.\ f'(4)=0$
Hochpunkt $H(1|81)$ liegt auf dem Graphen von *f*: $\Rightarrow III.\ f(1)=81$
Hochpunkt ist Extrempunkt: $\Rightarrow IV.\ f'(1)=0$
Sekantensteigung $m=\frac{f(4)-f(0)}{4-0} \Leftrightarrow -16=\frac{0-f(0)}{4} \Leftrightarrow V.\ f(0)=64$

$$
\begin{array}{ll}
I. \quad 0=256a+64b+16c+4d+e \Rightarrow 0=256a+64b+16c+4d+64 & |\ I.-4II. \\
II. \quad 0=256a+48b+8c+d & |\ II.-IV. \\
III. \quad 81=a+b+c+d+e \Leftrightarrow 81=a+b+c+d+64 \Leftrightarrow 17=a+b+c+d & \\
IV. \quad 0=4a+3b+2c+d & |\ IV.-III. \\
V. \quad 64=e &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
Ia. \quad 0=-768a-128b-16c+64 \Leftrightarrow -64=-768a-128b-16c & |\ Ia.+16IVa. \\
IIa. \quad 0=252a+45b+6c & |\ IIa.-6IVa. \\
IVa. \quad -17=3a+2b+c &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
Ib. \quad -336=-720a-96b & |\ \cdot 11 \\
IIb. \quad 102=234a+33b & |\ \cdot 32
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
Ic. \quad -3696=-7920a-1056b & |\ Ic.+IIc. \\
IIc. \quad 3264=7488a+1056b &
\end{array}
$$

$$-432=-432a \quad |\ :(-432) \Leftrightarrow a=1$$

Setze $a=1$ in IIc. ein: $IIc.\ 3264=7488+1056b \Leftrightarrow -4224=1056b \Leftrightarrow b=-4$
Setze $a=1$ und $b=-4$ in IVa. ein: $IVa.\ -17=3+(-8)+c \Leftrightarrow c=-12$
Setze $a=1$ und $b=-4$ und $c=-12$ in IV. ein: $IV.\ 0=4-12-24+d \Leftrightarrow d=32$

Lösung: $\boldsymbol{f(x)=x^4-4x^3-12x^2+32x+64}$