Mathematik LK M2, 2. KA – Eigenschaften ganzr. Funktionen – Lösung 15.03.2016

Aufgabe 1: Grenzwerte

1.1 Berechne unter Anwendung der Grenzwertsätze für Funktionen: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+12x-10}{-3x^3+2x+10}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+12x-10}{-3x^3+2x+10}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{2x^3\left(1+\frac{6}{x^2}-\frac{10}{x^3}\right)}{3x^3\left(1-\frac{2}{3x^2}-\frac{10}{x^3}\right)}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1+0-0}{1-0-0}=\mathbf{-\frac{2}{3}}$$

1.2 Sei *f* eine ganzrationale Funktion n-ten Grades mit $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0 x^0$. *g* ist eine Potenzfunktion mit $g(x)=a_n x^n$ (Der Funktionsterm von *g* ist der erste Summand im Funktionsterm von *f*).

Beweise: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to\infty}(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0 x^0)=\lim_{x\to\infty} a_n x^n\cdot\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{x^{n-1}}{x^n}+\frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{x^{n-2}}{x^n}+...+\frac{a_0}{a_n}\frac{x^0}{x^n}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty} a_n x^n\cdot\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x}+\frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{x^2}+...+\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)=\left(\lim_{x\to\infty} a_n x^n\right)\cdot(1+0+0+...+0)=\lim_{x\to\infty} a_n x^n=\lim_{x\to\infty} g(x)$$

q.e.d.

Aufgabe 2: Differenzen- und Differentialquotient

Gegeben sind die Funktionen $f(x)=2x^2-4x-6$, $g(x)=x^3+x^2-2x+4$ und $h(x)=x^4+4x^3$.

2.1 Berechne den Differenzenquotienten von *f* im Intervall $[-1;4]$.

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(2\cdot 4^2-4\cdot 4-6)-(2\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)-6)}{4-(-1)}=\frac{32-16-6-(2+4-6)}{5}=\frac{10}{5}=\mathbf{2}$$

2.2 Berechne den Differentialquotienten von *g* an der Stelle $x_0=1$.

$$g'(1)=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^3+(1+h)^2-2\cdot(1+h)+4-\left(1^3+1^2-2\cdot1+4\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1+3h+3h^2+h^3+1+2h+h^2-2-2h+4-\left(0+4\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3h+4h^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}3+4h+h^2=3+0+0=\mathbf{3}$$

2.3 Berechne die durchschnittliche Änderungsrate der Funktion *h* im Bereich von $x_1=-4$ bis $x_2=1$.

$$\boldsymbol{m_{[-4;1]}}=\frac{h(1)-h(-4)}{1-(-4)}=\frac{1^4+4\cdot1^3-\left((-4)^4+4\cdot(-4)^3\right)}{5}=\frac{5-0}{5}=\mathbf{1}$$

Aufgabe 3: Sekante, Tangente, Normale

Gegeben ist die Funktion $f(x)=2x^2-4x-6$.

3.1 Berechne die Gleichung der Sekanten von *f* im Intervall $[-1;4]$.

Sekantengleichung: $g(x)=mx+n$

$$m=\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=\frac{2\cdot4^2-4\cdot4-6-\left(2\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)-6\right)}{5}=\frac{32-16-2-4}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$f(-1)=2\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)-6=0$ Setze $m=2$ und $(-1|0)$ in $g(x)=mx+n$ ein:

$0=2\cdot(-1)+n \quad | +2 \Leftrightarrow n=2$ Also $\boldsymbol{g(x)=2x+2}$

3.2 Berechne die Gleichung der Tangenten von *f* an der Stelle $x_0=3$.

Tangentengleichung: $t(x)=mx+n$ Ableitungsfunktion: $f'(x)=4x-4$

$m=f'(x_0)=f'(3)=4\cdot3-4=8 \qquad f(3)=2\cdot3^2-4\cdot3-6=18-12-6=0$

Setze $m=8$ und $(3|0)$ in $t(x)=mx+n$ ein:

$0=8\cdot3+n \quad | -24 \Leftrightarrow n=-24$ Also $\boldsymbol{t(x)=8x-24}$

3.3 Berechne die Gleichung der Normalen von *f* an der Stelle $x_1=0$.

Normalengleichung: $t(x)=mx+n$ Ableitungsfunktion: $f'(x)=4x-4$

$f'(x_1)=4\cdot0-4=-4 \qquad m=-\frac{1}{f'(x_1)}=-\frac{1}{-4}=\frac{1}{4} \qquad f(0)=2\cdot0^2-4\cdot0-6=18-12-6=-6$

Setze $m=\frac{1}{4}$ und $(0|-6)$ in $n(x)=mx+n$ ein:

$-6=2\cdot0+n \Leftrightarrow n=-6$ Also $\boldsymbol{n(x)=\frac{1}{4}x-6}$

Aufgabe 4: Nullstellen, Symmetrie, Extrem- und Wendepunkte

Gegeben ist die Funktion $h(x)=x^4+4x^3$

4.1 Bestimme das Grenzwertverhalten der Funktion

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} x^4+4x^3=\lim_{x\to\pm\infty} x^4=\infty$$

Mathematik LK M2, 2. KA – Eigenschaften ganzr. Funktionen – Lösung 15.03.2016

4.2 Untersuche die Funktion auf Symmetrie mit Hilfe der Definitionen für Symmetrie.

Achsensymmetrie zur y-Achse: $h(x)=h(-x)$

$h(x)=x^4+4x^3=(-x)^4+4\cdot\left(-(-x)^3\right)=(-x)^4-4\cdot(-x)^3\neq f(-x)$ $\Rightarrow$ nicht achsensymmetrisch

Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung: $h(x)=-h(-x)$

$h(x)=x^4+4x^3=(-x)^4+4\cdot\left(-(-x)^3\right)=(-x)^4-4\cdot(-x)^3=-\left(-(-x)^4+4\cdot(-x)^3\right)\neq -f(-x)$ $\Rightarrow$

nicht punktsymmetrisch

4.3 Berechne die Nullstellen der Funktion.

$h(x_n)=0$

$0=x_n^4+4x_n^3=x_n^3\cdot(x_n+4)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x_1=0}$ dreifache Nullstelle (also ein Sattelpunkt).

Betrachte Klammer: $\boldsymbol{x_2=-4}$ einfache Nullstelle

4.4 Berechne die Extrempunkte und die Wendepunkte der Funktion.

Bilde zunächst Ableitungsfunktionen: $h'(x)=4x^3+12x^2; h''(x)=12x^2+24x; h'''(x)=24x+24$

Extrempunkte:

Notwendige Bedingung: $h'(x_E)=0$

$0=4x_E^3+12x_E^2=4x_E^2\cdot(x_E+3)$ $\Rightarrow x_1=0$ doppelte NST der 1. Ableitung

Betrachte Klammer: $\Rightarrow$ $x_1=-3$ einfache Nullstelle

Hinreichende Bedingung: $h''(x_E)\neq 0$

Weil $x_1=0$ eine doppelte NST der 1. Ableitung ist, handelt es sich nicht um eine Extremstelle, sondern um die x-Koordinate eines Sattelpunktes.

Weil $x_3=-3$ eine einfache NST der 1. Ableitung ist, handelt es sich um eine Extremstelle. Teste auf lokales Maximum oder lokales Minimum:

$h''(-2)=12(-3)^2+24\cdot(-3)=108-72>0$ $\Rightarrow$ Minimum

Berechne die y-Koordinate des Tiefpunkts: $f(-3)=(-3)^4+4\cdot(-3)^3=81-4\cdot 47=-27$

Das einzige Minimum liegt bei $\boldsymbol{T(-3|-27)}$.

<u>Wendepunkte:</u>

Notwendige Bedingung: $h''(x_W)=0$

$0=12x_W^2+24x_W=12x_W\cdot(x_W+2) \quad \Rightarrow x_1=0$ einfache NST der 2. Ableitung

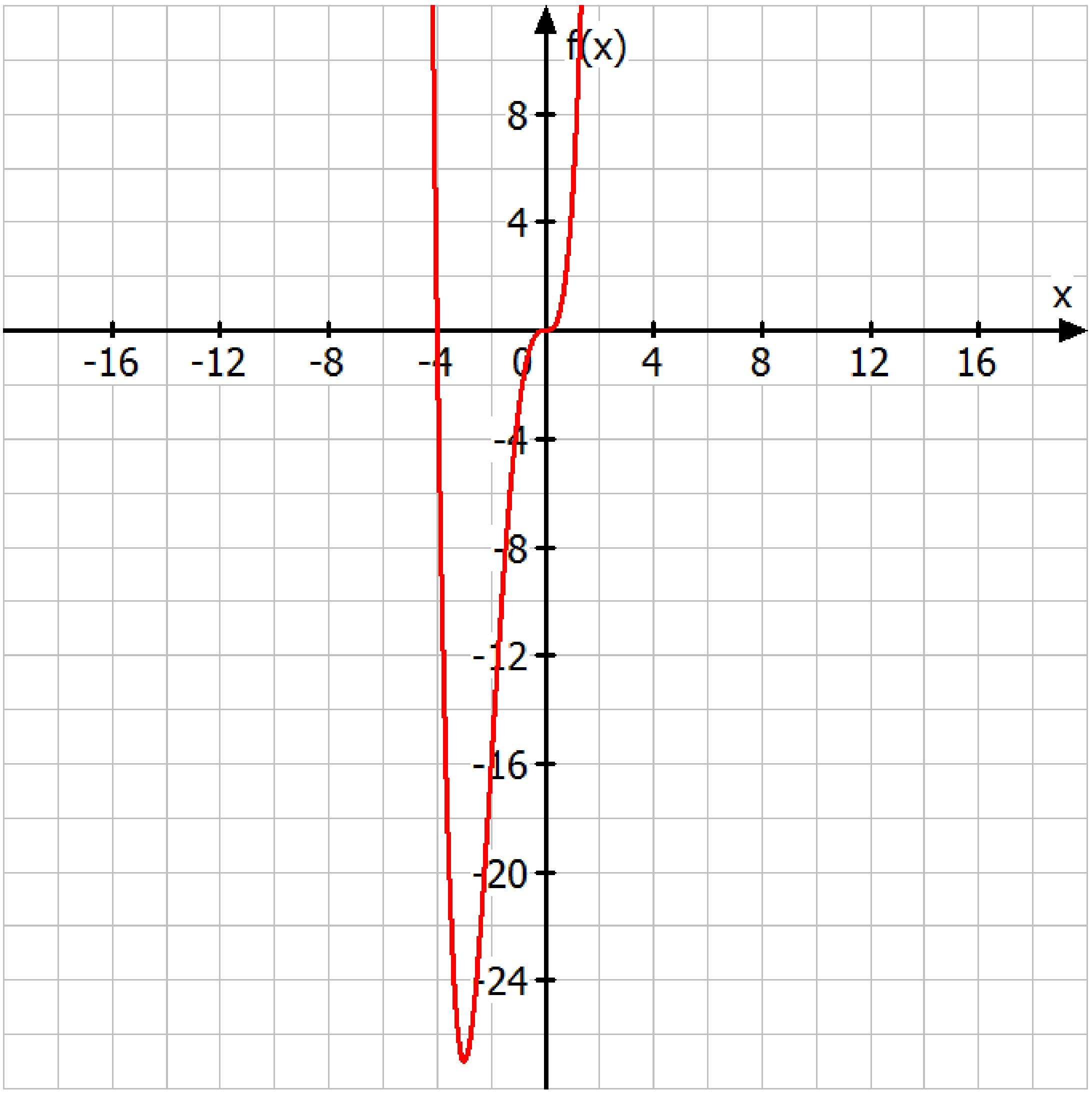
Betrachte Klammer: $\Rightarrow \; x_4=-2$ einfache Nullstelle

Weil beide NST der 2. Ableitung einfache NST sind, ist die hinreichende Bedingung für Wendestelle bereits erfüllt.
Berechne die y-Koordinaten des Wendepunkte: $f(-2)=(-2)^4+4\cdot(-2)^3=16-4\cdot 8=-16$

Also $\mathbf{W_1(-2|-16)}$

$f(0)=0$ (s.o.) Gleichzeitig ist auch $f'(0)=0$ (s.o.), so dass $\mathbf{W_2(0|0)}$ ein Sattelpunkt ist.

<u>4.5</u> Skizziere den Graphen der Funktion unter Benutzung der Ergebnisse aus Aufgabe 4.1-4.4



Mathematik LK M2, 2. KA – Eigenschaften ganzr. Funktionen – Lösung 15.03.2016

Aufgabe 5: Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^4-9x^3+28x^2-36x+16$. Die Funktion hat mindestens die Nullstellen $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=4$.

5.1 Berechne, falls vorhanden, die übrigen Nullstellen von *f*.

f hat maximal vier Nullstellen. Drei sind bereits angegeben. Falls es eine vierte NST gibt, lässt sie sich durch Polynomdivision des Funktionsterm durch die Faktoren $(x-1),(x-2)$ und $(x-4)$ finden. Also teilt man nacheinander durch die obigen Faktoren $\Big(\big[(x^4-9x^3+28x^2-36x+16):(x-1)\big]:(x-2)\Big):(x-4)$ und bestimmt die vierte NST aus dem Ergebnis. Das geht auch in einem Schritt, denn

$$\Big(\big[(x^4-9x^3+28x^2-36x+16):(x-1)\big]:(x-2)\Big):(x-4)=(x^4-9x^3+28x^2-36x+16):(x-1):(x-2):(x-4)$$
$$=(x^4-9x^3+28x^2-36x+16):\big[(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)\big]$$

Mit $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)=x^3-7x^2+14x-8$ lautet die Polynomdivision also:

$$\begin{array}{l}
(x^4-9x^3+28x^2-36x+16):(x^3-7x^2+14x-8)=x-2\\
-\underline{(x^4-7x^3+14x^2-8x)}\\
\quad -2x^3+14x^2-28x+16\\
\quad -\underline{(-2x^3+14x^2-28x+16)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$x_2=2$ ist also eine doppelte Nullstelle.

Natürlich kann man auch mehrere Polynomdivisionen machen:

$$\begin{array}{l}
(x^4-9x^3+28x^2-36x+16):(x-1)=x^3-8x^2+20x-16\\
-\underline{(x^4-x^3)}\\
\quad -8x^3+28x^2-36x+16\\
\quad -\underline{(-8x^3+8x^2)}\\
\qquad 20x^2-36x+16\\
\qquad -\underline{(20x^2-20x)}\\
\qquad\qquad -16x+16\\
\qquad\qquad -\underline{(-16x+16)}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(x^3-8x^2+20x-16):(x-2)=x^2-6x+8\\
-\underline{(x^3-2x^2)}\\
\quad -6x^2+20x-16\\
\quad -\underline{(-6x^2+12x)}\\
\qquad 8x-16\\
\qquad -\underline{(8x-16)}\\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

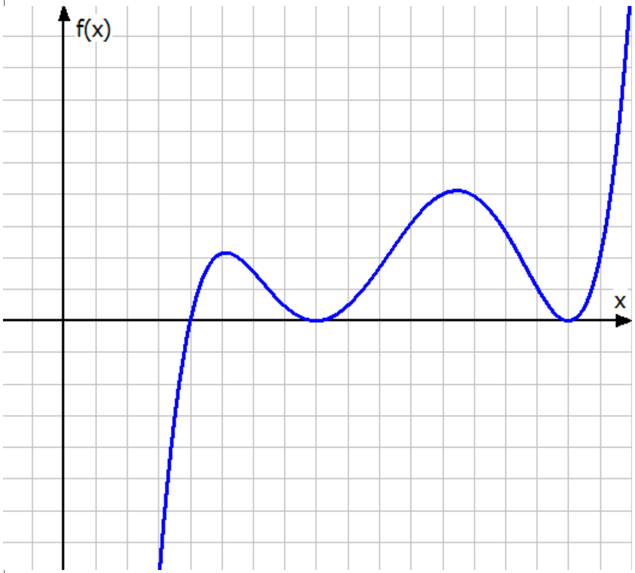
Statt einer Polynomdivision $(x^2-6x+8):(x-4)$ ist nun die p-q-Formel schneller:

$$x_{2/3}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1 \Rightarrow x_2=2;x_3=4$$

$x_3=4$ ist schon bekannt. $x_2=2$ hatten wir schon in der Polynomdivision benutzt, so dass es sich hier um eine doppelte Nullstellen handeln muss.

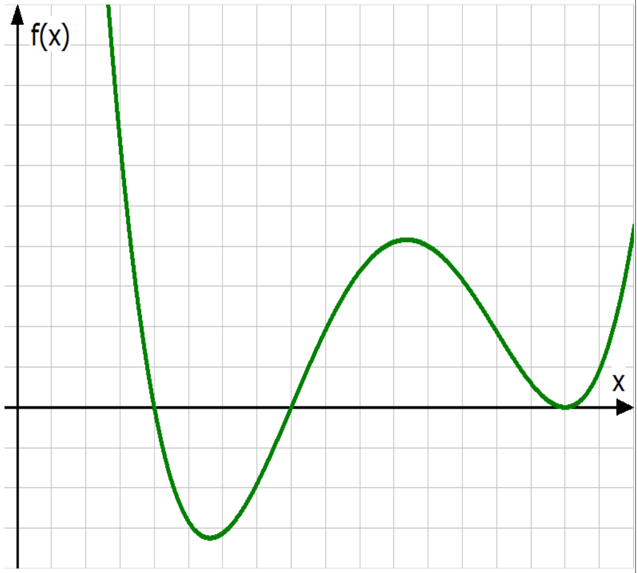
5.2 Entscheide für jeden der folgenden Graphen, ob es sich um den Graphen von *f* handeln könnte. Begründe deine Entscheidung mit Hilfe von mathematischen Gesetzmäßigkeiten aus dem Unterricht und dem Ergebnis aus 5.1. Die Begründung über eine Wertetabelle ist unzulässig!

5.2.1



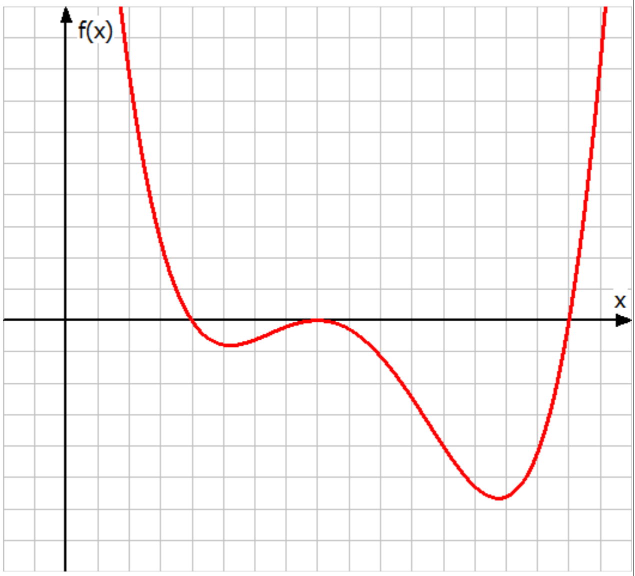
Es kann sich nicht um den Graphen von f handeln, denn *f* ist eine Polynomfunktion 4. Grades, und für das Grenzwertverhalten muss gelten: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$

5.2.2



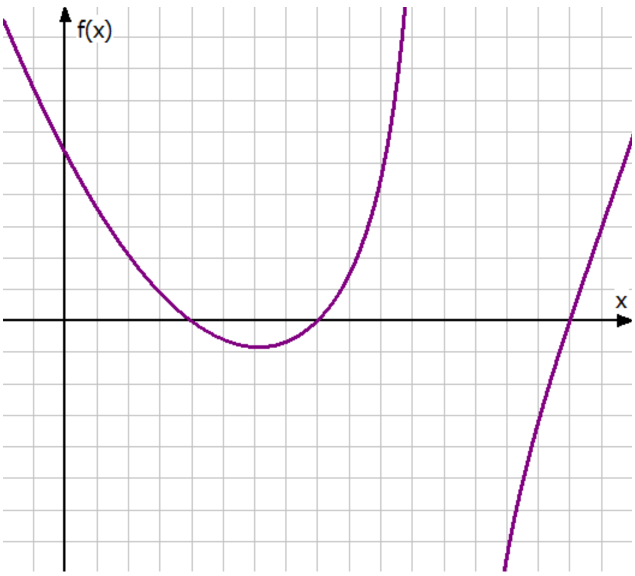
Es kann sich nicht um den Graphen von f handeln, denn die doppelte Nullstelle liegt bei $x_2=2.$ Dort muss der Graph eine Extremstelle haben. Hier liegt die Extremstelle aber recht davon.

5.2.3



Hier kann es sich um den Graphen von *f* handeln, denn das Grenzwertverhalten dieses Graphen stimmt und die doppelte Nullstelle befindet sich an der richtigen Stelle.

5.2.4



Es kann sich nicht um den Graphen von f handeln, denn dieser Graph hat eine Polstelle, ist also nicht überall stetig. Jede ganzrationale Funktion ist aber im gesamten Definitionsbereich stetig.