Mathematik LK M2, 1. Kursarbeit – Mittelstufe / Folgen – Lösung 05.10.2015

__Mittelstufenmathematik__

__Aufgabe 1:__ Löse die folgenden Gleichungen und gib die Lösungsmenge an. („Probieren" ist keine zulässige Lösungsmethode).

__1.1__ $2x-4=-5x-53 \quad \| +4+5x$ $\Leftrightarrow 7x=-49 \quad \| :7$ $\Leftrightarrow x=-7$ $\boldsymbol{L=\{-7\}}$	__1.2__ $x^3+x^2+4x=x(x^2+2x)-5$ $\Leftrightarrow x^3+x^2+4x=x^3+2x^2-5$ $\Leftrightarrow -x^2+4x+5=0 \quad \| \cdot(-1)$ $\Leftrightarrow x^2-4x-5=0$ p-q-Formel: $x_{1/2}=2\pm\sqrt{2^2+5}=2\pm 3$ $\Rightarrow x_1=-1; x_2=5$ $\boldsymbol{L=\{-1;5\}}$	__1.3__ $2^{x^2+1}=4^x \quad \| T$ $\Leftrightarrow 2^{x^2+1}=(2^2)^x \quad \| T$ $\Leftrightarrow 2^{x^2+1}=2^{2x} \quad \| \log_2$ $\Leftrightarrow x^2+1=2x \quad \| -2x$ $\Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \quad \| T$ $\Leftrightarrow (x-1)^2=0$ $\Leftrightarrow x=1 \quad \boldsymbol{L=\{1\}}$

__Aufgabe 2:__ Berechne die folgenden Terme durch Umformen bzw. vereinfache sie so weit wie möglich.

__2.1__ $(\sqrt{48}-\sqrt{3})^2=\sqrt{48}^2-2\cdot\sqrt{48}\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=48-2\cdot\sqrt{48\cdot 3}+3=51-2\cdot\sqrt{144}=51-24=\mathbf{27}$

__2.2__ $\sqrt[1000]{36^{500}}=36^{\frac{500}{1000}}=36^{\frac{1}{2}}=\sqrt{36}=\mathbf{6}$

__2.3__ $\log_3\left(\frac{\log_b(a^9)}{\log_b(a)}\right)=\log_3(\log_a(a^9))=\log_3(9)=\mathbf{2}$

__Aufgabe 3:__ Der Graph einer quadratischen Funktion *f* geht durch die Punkte $A(-1|7), B(2|-5)$ und $C(4|-18)$.

__3.1__ Berechne die Funktionsgleichung mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems.

(Kontrolllösung: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+4$)

Setze die Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung $f(x)=ax^2+bx+c$ ein:

$I. \quad 7=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c$ $II. \quad -5=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c$ $III. -18=a\cdot 4^2+b\cdot 4+c$ $I. \quad 7=a-b+c$ $II. \quad -5=4a+2b+c \quad \| II.-I.$ $III. \quad -18=16a+4b+c \quad \| III.-I.$ $IIa. \quad -12=3a+3b \quad \| :3$ $IIIa. \quad -25=15a+5b \quad \| :5$ $IIa. \quad -4=a+b$ $IIIb. \quad -5=3a+b \quad \| IIIb.-IIb.$	$IIIc. \quad -1=2a \quad \| :2$ $\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$ Setze $a=-\frac{1}{2}$ in IIa. ein: $IIa. \quad -4=-0{,}5+b \quad \| +0{,}5$ $\Leftrightarrow -3{,}5=b$ Setze $a=-0{,}5$ in und $b=3{,}5$ in I. ein: $I. \quad 7=-0{,}5-(-3{,}5)+c \quad \| -3$ $\Leftrightarrow 4=b$ Also $\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+4}$

__3.2__ Berechne den Scheitelpunkt der Parabel mit Hilfe einer im Unterricht benutzten Methode.

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+4=-\frac{1}{2}(x^2+7x)+4=-\frac{1}{2}(x^2+7x+3{,}5^2-3{,}5^2)+4=-\frac{1}{2}\left[(x^2+3{,}5)^2-12{,}25\right]+4$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2+3{,}5)^2+6{,}125+4=-\frac{1}{2}(x^2+3{,}5)^2+10{,}125 \qquad \boldsymbol{S(-3{,}5|10{,}125)}$$

Mathematik LK M2, 1. Kursarbeit – Mittelstufe / Folgen – Lösung 05.10.2015

Folgen

Aufgabe 4: Erkläre die Begriffe „obere Schranke einer Menge", „untere Schranke einer Menge", „Supremum", „Infimum" und gib für jeden Begriff ein Beispiel anhand der Menge

$A=\left\{ -5;-4{,}5;-4\frac{1}{3};-4\frac{1}{4};-4\frac{1}{5};-4\frac{1}{6};... \right\}$ an.

Die exakte Definition wäre natürlich optimal, muss aber nicht sein

Def.: obere Schranke, untere Schrank, Supremum, Infimum

Gegeben ist eine Zahlenmenge M mit einer Teilmenge $X\subset M$. $b\in M$ heißt obere Schranke von X, wenn $\forall x\in X$ gilt: $b\geq x$. $b\in M$ heißt untere Schranke von X, wenn $\forall x\in X$ gilt: $b\leq x$.
Die kleinste obere Schranke von X heißt Supremum.
Die größte untere Schranke von X heißt Infimum.

Alternative z.B.:
Eine Zahl, die größer/gleich groß als jede Zahl in einer bestimmten Menge ist, heißt obere Schranke dieser Menge. Die kleinste obere Schranke der Menge heißt Supremum.
Eine Zahl, die kleiner/gleich groß als jede Zahl in einer bestimmten Menge ist, heißt untere Schranke dieser Menge. Die größte untere Schranke der Menge heißt Infimum.

Beispiele für die Menge A:
obere Schranke: 3; Supremum -4; untere Schranke: -98; Infimum: -5

Aufgabe 5: Stelle eine rekursive oder explizite Vorschrift für die Zahlenfolgen auf, die durch folgende Situationen beschrieben werden. Du musst die Vorschrift nicht beweisen. Gib außerdem jeweils den Wert des 5. Folgenglieds an.

Hinweis für die folgenden Aufgaben: Alle Kinder starten mit 0 € Geldvermögen.

5.1 Albert bekommt am Anfang jeder Woche 4 € Taschengeld. Er gibt in jeder Woche sein ganzes Geld aus. a_n ist sein Geldvermögen am Ende der Woche *n*.

Explizite Vorschrift: $a_n=0;$ Rekursive Vorschrift: $a_{n+1}=0$ mit $a_1=0$; $a_5=0$

5.2 Ina bekommt am Anfang jeder Woche 8 € Taschengeld. Jede Woche gibt sie bis zum Ende der Woche die Hälfte ihrer Ersparnisse aus. a_n ist ihr gespartes Geld am Ende der Woche *n*.

Rekursive Vorschrift: $a_{n+1}=\frac{a_n+8}{2}$ mit $a_1=4$; $a_5=7{,}75$

5.3 Klaus bekommt am Anfang jeder zweiten Woche 10 € Taschengeld. Klaus gibt überhaupt kein Geld aus. a_n ist sein Geldvermögen am Ende der Woche *n*.

Explizite Vorschrift: $a_n=5n+\frac{5\cdot(1-(-1)^n)}{2}=\frac{5}{2}\cdot\left(2n+1-(-1)^n\right);$

Rekursive Vorschrift: $a_{n+1}=\begin{cases} a_n, wenn\, n=gerade \\ a_n+10, wenn\, n=ungerade \end{cases}$ mit $a_1=10$; $a_5=30$

5.4 Die Eltern von Albert, Ina und Klaus geben ihren Kindern am Anfang jeder Woche das Taschengeld. a_n ist die Summe an Taschengeld, das die Eltern am Ende des Monats *n* insgesamt ausgegeben haben, wenn man annimmt, dass ein Monat immer exakt vier Wochen hat.

Explizite Vorschrift: $a_n = n \cdot (4 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 10) = 52n$
Rekursive Vorschrift: $a_{n+1} = a_n + 52$ mit $a_1 = 52$
$a_5 = 260$

Aufgabe 6: Gegeben ist die Folge mit der rekursiven Vorschrift $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Beweise, dass $a_n = 2^n - 1$ die zugehörige explizite Vorschrift ist.

Behauptung: $a_n = 2^n - 1$

Beweis: 1.) Prüfe für $n = 1$: $a_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ o.k.

2.) Setze die Vermutung in die rekursive Rechenvorschrift ein:

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2\cdot(2^n - 1) - 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wir haben damit bewiesen, dass wenn die Vorschrift für n gilt, so gilt sie auch für n+1.

Da sie für $n = 1$ gültig ist muss sie also auch für $n = 2$ gültig sein. Wenn sie für $n = 2$, gültig ist, muss sie also auch für $n = 3$ gültig sein, usw. Also gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$! q.e.d.

Aufgabe 7: Beweise die folgenden Ungleichungen durch Umformungen und/oder Abschätzungen oder widerlege sie.

7.1 $0 < n^2 - 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
Widerlegung durch Gegenbeispiel: Setze $n = 2$ ein: $0 < 2^2 - 2 \cdot 2 \Leftrightarrow 0 < 0$ unwahr

7.2 $3n^2 \leq n^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

$3n^2 \leq n^3 \quad | -3n^2$
$\Leftrightarrow\ 0 \leq n^3 - 3n^2 \quad | \ T$
$\Leftrightarrow\ 0 \leq n^2 \cdot (n-3) \qquad n^2 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ (n-3) \geq 0 \ \forall n \geq 3$ Das Produkt ist also mindestens 0 für $n \geq 3$. q.e.d.

7.3 $2^{n+1} \leq 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$2^{n+1} \leq 3^n \quad | \ \log_2$
$\Leftrightarrow\ n+1 \leq \log_2(3^n) \quad | \ T$
$\Leftrightarrow\ n+1 \leq n \cdot \log_2(3) \quad | -n$
$\Leftrightarrow\ 1 \leq n \cdot \log_2(3) - n \quad | \ T$
$\Leftrightarrow\ 1 \leq n(\log_2(3) - 1) \qquad \log_2(3) < 1{,}59 \Rightarrow n(\log_2(3) - 1) < n(1{,}59 - 1) = 0{,}59n$ Also
$\Leftrightarrow\ 1 \leq n(\log_2(3) - 1) < 0{,}59n$
$\Leftrightarrow\ 1 \leq 0{,}59n$ Diese Ungleichung wird wahr für $n \geq 2$. q.e.d.

Aufgabe 8: Untersuche die folgenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit.

8.1 $a_n = \frac{n+1}{n-1}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+1}{(n+1)-1} \frac{n+1}{n-1} = \frac{n+2}{n} \frac{n+1}{n-1} = \frac{(n+2)(n-1)}{n(n-1)} \frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n(n-1)} = \frac{(n+2)(n-1)-(n-1)\cdot(n+1)}{n(n-1)}$

$= \frac{n^2-n-2-(n^2-1^2)}{n(n-1)} = \frac{n^2-n-2-n^2+1}{n(n-1)} = \frac{-n-1}{n(n-1)} < 0$ weil der Zähler immer negativ ist und der Nenner immer positiv ist für $n>1$. Also ist die Folge streng monoton fallend.

Beschränktheit: Die Folge ist nach oben beschränkt und $a_2 = \frac{2+1}{2-1} = 3$ ist eine obere Schranke. Dies folgt direkt aus der strengen Monotonie der Folge.

Beh.: Die Folge ist nach unten beschränkt und $S=1$ ist eine untere Schranke.

Bew.: Aus der Behauptung folgt: $a_n \geq I \quad \forall n$

$\frac{n+1}{n-1} \geq 1 \quad | \cdot(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad n+1 \geq n-1 \quad | -n \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq -1$ Die Ungleichung ist wahr, also ist die Behauptung wahr und a_n ist nach oben beschränkt.

a_n ist also (nach unten und nach oben) beschränkt.

8.2 $a_n = \sqrt{n^2+n}$

Monotonie: Annahme: (a_n) ist streng monoton steigend $a_n = \sqrt{n^2+n}$

$\Rightarrow a_n < a_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n^2+n} < \sqrt{(n+1)^2+(n+1)} \quad |\ ^2$ erlaubt, weil beide Seiten positiv

$\Rightarrow n^2+n < (n+1)^2+n+1$

$\Leftrightarrow n^2+n < n^2+2n+1+n+1 \quad | -n^2+n$

$\Leftrightarrow 0 < 3n+2$ wahr $\forall n \in \mathbb{N}$ Also: Die Folge ist streng monoton steigend.

Beschränktheit: Die Folge ist nach unten beschränkt und $a_1 = \sqrt{1^2+1} = \sqrt{2}$ ist eine untere Schranke. Dies folgt direkt aus der strengen Monotonie der Folge.

Annahme: Die Folge ist nicht nach oben beschränkt. Beweis durch Widerspruch:
Behauptung: Die Folge ist nach oben beschränkt und S eine obere Schranke.
Dann muss gelten: $a_n \leq S \quad \forall n$

$\Leftrightarrow \sqrt{n^2+n} \leq S \quad |\ ^2$ erlaubt, weil beide Seiten positiv

$\Rightarrow n^2+n \leq S^2 \quad | \ T$

$\Leftrightarrow n(n+1) \leq S^2$ Weil $n < n+1$ gilt: $n^2 < n(n+1)$ Also

$\Leftrightarrow n^2 < n(n+1) \leq S^2$

$\Leftrightarrow n^2 \leq S^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow n \leq \pm S$

Widerspruch, weil es immer eine natürliche Zahl gibt, die größer ist als eine gegebene Zahl S.