Mathematik LK 11 M1, HÜ Nr. 3 – Vollständige Induktion – Lösung **10.12.2015**

<u>Aufgabe 1:</u> Beweise (oder widerlege) die folgenden Behauptungen mit Hilfe der vollständigen Induktion.

<u>1.1</u> $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang $n=1$: $\quad \sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 \quad \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0+1) = 0$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} + \frac{6n^2+12n+6}{6}$$

$$= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

„Rückwärts“: $\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} = \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)$ q.e.d.

oder

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+n)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot [n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1) \cdot (2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1) \cdot (2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)[(n+2)(2n+3)] = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)$$

(weil $(k+2)(2k+3) = 2k^2+3k+4k+6 = 2k^2+7k+6)$ q.e.d.

<u>1.2</u> $4^n+15n-1$ ist durch 3 teilbar forall $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: $\frac{4^n+15n-1}{3} = m;\ m \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad 4^n = 3m-15n+1$

Induktionsanfang $n=1$: $\quad \frac{4^1+15 \cdot 1-1}{3} = \frac{18}{3} = 6$ o.k.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\frac{4^{n+1}+15(n+1)-1}{3} = \frac{1}{3}\left(4 \cdot 4^n+15n+14\right) = \frac{1}{3}\left(4 \cdot (3m-15n+1)+15n+14\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(12m-60n+4+15n+14\right) = \frac{1}{3}\left(12m-45n+18\right) = 4m-15n+6$$

Rechts steht eine Summe aus ganzen Zahlen. q.e.d.