**Mathematik LK 11 M2, HÜ Nr. 2 – Grenzwerte – Lösung A** **30.11.2015**

**Aufgabe 1:** Bestimme die Grenzwerte der folgenden Folgen. Begründe deine Antwort, z.B. mit einer Anwendung der Grenzwertsätze. Allerdings dürfen die allgemeinen Regeln, die wir für Folgen mit Polynomen aufgestellt haben, hier noch nicht angewendet werden.

**1.1** $a_n = n^4 - n^5 + n^2 + 2$

$$\lim_{n\to\infty} (n^4 - n^5 + n^2 + 2) = \lim_{n\to\infty} n^5 \left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^5}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} n^5\right) \cdot (0 - 1 + 0 + 0) = -\infty$$

**1.2** $a_n = \frac{n^2}{2+n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n\left(\frac{2}{n}+1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{2}{n}+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} n}{0+1} = \infty$

**1.3** $a_n = \frac{1}{1000} n^{-3} + \frac{1}{1000} n^2 - 1000 n^2 + n - 2$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1000} n^{-3} + \frac{1}{1000} n^2 - 1000 n^2 + n - 2\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{1000 n^5} - \frac{1}{1000} - 1000 - \frac{2}{n^2}\right)$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} n^2\right) \cdot (0 - 999{,}999 + 0) = -\infty$$

**1.4** $a_n = \frac{4n^3 + 6n}{3n^3 + 2n^2}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 6n}{3n^3 + 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \left(4 + \frac{6}{n^2}\right)}{n^3 \left(3 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{4+0}{3+0} = \frac{4}{3}$

**1.5** $a_n = \sin(n) + \frac{1}{n}$

**kein Grenzwert, denn der Sinus hat mindestens 2 Häufungspunkte, nämlich -1 und 1.** (Tatsächlich sind es sogar unendlich viele Häufungspunkte. Dies gilt auch, wenn man wie hier nur natürliche Zahlen einsetzt).

**1.6** $a_n = \frac{2^n}{3^n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Weil wiederholt mit einer Zahl <1 multipliziert wird, muss $(a_n)$ streng monoton fallend sein und hat gleichzeitig eine größte untere Schranke 0, denn die Werte können niemals negativ werden.