**Mathematik LK 11 M2, HÜ Nr. 1 – Mittelstufenmathematik – Lösung B** **21.09.2015**

**<u>Aufgabe 1:</u>** Berechne $12\cdot e^{\ln(3f)-\log_f\left(\frac{f^2c}{d^{-3}}\right)-\ln(f)+\log_f\left(\frac{d^3c}{f^{-2}}\right)}$

$$=12\cdot e^{\ln\left(\frac{3f}{f}\right)-\log_f\left(\frac{f^2c}{d^{-3}}\cdot\frac{f^{-2}}{d^3c}\right)}=12\cdot e^{\ln(3)-\log_f(1)}=12\cdot e^{\ln(3)-0}=12\cdot 3=\mathbf{36}$$

**<u>Aufgabe 2:</u>** Der Graph einer quadratischen Funktion *f* geht durch die Punkte $A(-4|-4), B(0|2)$ und $C(8|-10)$.

**<u>2.1</u>** Berechne die Funktionsgleichung mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems.
(Kontrolllösung: $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2$)

| | |
|---|---|
| $I.\quad -4=a\cdot(-4)^2+b\cdot(-4)+c$<br>$II.\quad 2=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c$<br>$III.-10=a\cdot 8^2+b\cdot 8+c$<br><br>$I.\quad -4=16a-4b+c$<br>$II.\quad 2=c$<br>$III.-10=64a+8b+c$<br><br>Setze $c=2$ ein:<br>$Ia.\quad -4=16a-4b+2 \quad \mid -2$<br>$IIIa.-10=64a+8b+2 \quad \mid -2$<br><br>$Ib.\quad -6=16a-4b \quad \mid \cdot 2$<br>$IIIb.-12=64a+8b$<br><br>$Ic.\quad -12=32a-8b \quad \mid Ic.+IIIb.$<br>$IIIb.-12=64a+8b$ | $Id.\quad -24=96a \quad \mid :96$<br>$\Leftrightarrow\ a=-\frac{1}{4}$<br><br>Setze $a=-\frac{1}{4}$ und $c=2$ in *Ib.* ein:<br><br>$Ib.\quad -6=16\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-4b \ \Leftrightarrow\ -6=-4-4b$<br>$\Leftrightarrow\ -2=-4b \ \Leftrightarrow\ b=\frac{1}{2}$<br><br>Also $\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2}$ |

**<u>2.2</u>** Berechne den Scheitelpunkt der Parabel mit Hilfe der im Unterricht benutzten Methode.

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2=-\frac{1}{4}\left(x^2-2x\right)+2=-\frac{1}{4}\left(x^2-2x+1-1\right)+2=-\frac{1}{4}\left[(x^2-1)^2-1\right]+2$$
$$=-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{4}+2=-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{9}{4}=-\frac{1}{4}(x-1)^2+2{,}25$$

Also hat der Scheitelpunkt die Koordinaten $\boldsymbol{S(1|2{,}25)}$.

**<u>2.3</u>** Berechne die Nullstellen der Funktion.

Die Nullstellen sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte $(x_n|0)$ mit der x-Achse. Einsetzen in Funktionsgleichung:

Lösung mit p-q-Formel:

$$0=-\frac{1}{4}x_n^2+\frac{1}{2}x_n+2 \quad | \cdot(-4)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0=x_n^2-2x_n-8 \quad \text{p-q-Formel:}$$

$$x_{1/2}=1\pm\sqrt{(-1)^2+8}=1\pm\sqrt{9}=1\pm3$$

$$\Rightarrow x_1=1-3=-2 \;\; ; \;\; x_2=1+3=4$$

Also $\boldsymbol{x_1=-2 \;\; ; \;\; x_2=4}$

Lösung mit quadratischer Ergänzung:

$$0=-\frac{1}{4}x_n^2+\frac{1}{2}x_n+2 \quad | \cdot(-4)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0=x_n^2-2x_n-8 \quad | \; T$$

$$\Leftrightarrow \quad 0=x_n^2-2x_n+1-1-8 \quad | \; T$$

$$\Leftrightarrow \quad 0=(x_n-1)^2-9 \quad | +9$$

$$\Leftrightarrow \quad 9=(x_n-1)^2 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pm3=x_{1/2}-1 \quad | +1$$

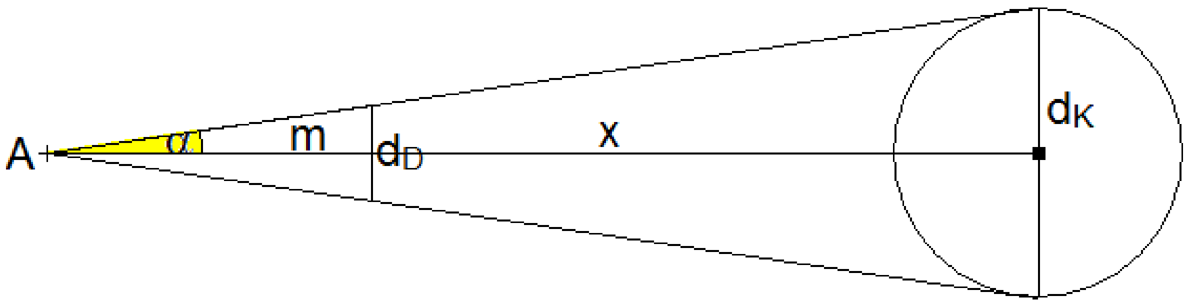
$$\Rightarrow x_1=-3+1=-2 \;\; ; \;\; x_2=+3+1=4$$

Also $\boldsymbol{x_1=-2 \;\; ; \;\; x_2=4}$

**<u>Aufgabe 3:</u>** Gustav steht in Shanghai und sagt: "Ich kann mit dem Daumen meiner ausgestreckten Hand genau die untere Kugel des Fernsehturms abdecken".

Berechne Guastavs Entfernung zur Fernsehturmkugel.

Daten: Durchmesser Kugel: $d_K=50\,m$. Durchmesser Daumen: $d_D=1{,}2\,cm$.
Entfernung Auge – Daumen: $m=50\,cm$.




x ist die Entfernung vom Auge bis zum Mittelpunkt der Kugel. Dann gilt mit dem Strahlensatz:

$$\frac{\frac{d_D}{2}}{m}=\frac{\frac{d_K}{2}}{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{d_D}{m}=\frac{d_K}{x} \;\Leftrightarrow\; x=\frac{d_K\cdot m}{d_D}=\frac{50\,m\cdot0{,}5\,m}{0{,}012\,m}=2083{,}33\,m$$

Auch ohne Strahlensatz ist man schnell beim gleichen Ergebnis: $\tan(\alpha)=\frac{\frac{d_D}{2}}{m}$ im kleinen Dreieck und $\tan(\alpha)=\frac{\frac{d_K}{2}}{x}$ im großen Dreieck. Gleichsetzen führt zur Gleichung des Strahlensatzes.

Die Entfernung *l* zur Kugel ist die kleinste Strecke vom Auge zur Kugel. Deshalb muss vom Ergebnis noch der Radius der Kugel subtrahiert werden.

$$\boldsymbol{l}=x-\frac{d_K}{2}=2083{,}33\,m-25\,m=\mathbf{2058{,}33\,m}$$

**A: Die Kugel ist 2,06 km entfernt.**